线性代数
第五章：矩阵的等价、相似与合同
习 题 解 答

宿州学院 数学与统计学院

目录

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

1.解

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

1.解 (1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -11 \\ 4 & -5 & 17 \end{pmatrix}$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

1.解 (1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -11 \\ 4 & -5 & 17 \end{pmatrix}$

第1行乘2加到第2行,第1行乘(-4)加到第3行

习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

1.解 (1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -11 \\ 4 & -5 & 17 \end{pmatrix}$

第1行乘2加到第2行,第1行乘(-4)加到第3行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

1.解 (1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -11 \\ 4 & -5 & 17 \end{pmatrix}$

第1行乘2加到第2行,第1行乘(-4)加到第3行　　第2行加到第3行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

习题5.1$(P_{175}-P_{175})$

1.解 (1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -11 \\ 4 & -5 & 17 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\text{第1行乘2加到第2行,第1行乘(-4)加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2行加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

1.解 (1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -11 \\ 4 & -5 & 17 \end{pmatrix}$

第1行乘2加到第2行,第1行乘(-4)加到第3行

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

第2行加到第3行

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

第1列加到第2行,第1列乘(-3)加到第3列

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

1.解 (1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -11 \\ 4 & -5 & 17 \end{pmatrix}$

第1行乘2加到第2行,第1行乘(-4)加到第3行

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

第2行加到第3行

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

第1列加到第2行,第1列乘(-3)加到第3列

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

1.解 (1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -11 \\ 4 & -5 & 17 \end{pmatrix}$

第1行乘2加到第2行,第1行乘(-4)加到第3行

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

第2行加到第3行

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

第1列加到第2行,第1列乘(-3)加到第3列

第2列乘5加到第3列

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

1.解 (1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -11 \\ 4 & -5 & 17 \end{pmatrix}$

第1行乘2加到第2行,第1行乘(-4)加到第3行

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

第2行加到第3行

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

第1列加到第2行,第1列乘(-3)加到第3列

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

第2列乘5加到第3列

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

矩阵的等价标准形为$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

矩阵的等价标准形为$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix}1&-1&3&2\\-2&3&-11&5\\4&-5&17&3\end{pmatrix}$

习题5.1$(P_{175}-P_{175})$

矩阵的等价标准形为$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix}1&-1&3&2\\-2&3&-11&5\\4&-5&17&3\end{pmatrix}$

第1行乘2加到第2行,第1行乘(-4)加到第3行

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

矩阵的等价标准形为$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix}1&-1&3&2\\-2&3&-11&5\\4&-5&17&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第1行乘2加到第2行,第1行乘(-4)加到第3行}}\begin{pmatrix}1&-1&3&2\\0&1&-5&9\\0&-1&5&-5\end{pmatrix}$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

矩阵的等价标准形为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -11 & 5 \\ 4 & -5 & 17 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第1行乘2加到第2行,第1行乘(-4)加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 9 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

第2行加到第3行,第3行乘 $\frac{1}{4}$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

矩阵的等价标准形为 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix}1&-1&3&2\\-2&3&-11&5\\4&-5&17&3\end{pmatrix}$

第1行乘2加到第2行,第1行乘(-4)加到第3行

$\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&3&2\\0&1&-5&9\\0&-1&5&-5\end{pmatrix}$

第2行加到第3行,第3行乘$\frac{1}{4}$

$\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&3&2\\0&1&-5&9\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

矩阵的等价标准形为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -11 & 5 \\ 4 & -5 & 17 & 3 \end{pmatrix}$ 第1行乘2加到第2行,第1行乘(-4)加到第3行 $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 9 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

第2行加到第3行,第3行乘$\frac{1}{4}$ $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

第1列分别乘1,(-3),(-2) 加到第2,3,4列

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

矩阵的等价标准形为$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix}1&-1&3&2\\-2&3&-11&5\\4&-5&17&3\end{pmatrix}$

第1行乘2加到第2行,第1行乘(-4)加到第3行

$\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&3&2\\0&1&-5&9\\0&-1&5&-5\end{pmatrix}$

第2行加到第3行,第3行乘$\frac{1}{4}$

$\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&3&2\\0&1&-5&9\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

第1列分别乘1,(-3),(-2) 加到第2,3,4列

$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-5&9\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

第2列分别乘5,(-9) 加到第3,4列

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

第2列分别乘5,(-9) 加到第3,4列

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

第2列分别乘5,(-9) 加到第3,4列　　交换3,4列

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

习题5.1$(P_{175}-P_{175})$

第2列分别乘5,(-9) 加到第3,4列

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

交换3,4列

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

第2列分别乘5,(-9) 加到第3,4列　　交换3,4列

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

所以矩阵的等价标准形是$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

第2列分别乘5,(-9) 加到第3,4列　　交换3,4列

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

所以矩阵的等价标准形是$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix}1&-2\\-3&-6\\2&-4\end{pmatrix}$

习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

第2列分别乘5,(-9) 加到第3,4列 交换3,4列

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

所以矩阵的等价标准形是$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ 第1行分别乘3,(-2)加到第2,3行

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

第2列分别乘5,(-9) 加到第3,4列　　交换3,4列

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

所以矩阵的等价标准形是$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$.

第1行分别乘3,(-2)加到第2,3行

(3) $\begin{pmatrix}1&-2\\-3&-6\\2&-4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-2\\0&-12\\0&0\end{pmatrix}$

习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

第2列分别乘5,(-9) 加到第3,4列 交换3,4列

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

所以矩阵的等价标准形是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

第1行分别乘3,(-2)加到第2,3行 第2行乘$(-\frac{1}{12})$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -12 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

$$\xrightarrow{\text{第2列分别乘5,(-9) 加到第3,4列}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{交换3,4列}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

所以矩阵的等价标准形是 $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix}1&-2\\-3&-6\\2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第1行分别乘3,(-2)加到第2,3行}}\begin{pmatrix}1&-2\\0&-12\\0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第2行乘}(-\frac{1}{12})}\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$

习题5.1$(P_{175}-P_{175})$

第2行乘2加到第1行

习题5.1$(P_{175}-P_{175})$

第2行乘2加到第1行

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix},$$

习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

第2行乘2加到第1行

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

，所以矩阵的等价标准形是$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

$$\xrightarrow{\text{第2行乘2加到第1行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

，所以矩阵的等价标准形是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.解

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

第2行乘2加到第1行

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ，所以矩阵的等价标准形是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.解 对矩阵A实施初等变换，$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

第2行乘2加到第1行

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$，所以矩阵的等价标准形是$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

2.解 对矩阵A实施初等变换，$\begin{pmatrix}1&-1&-3&1\\1&-1&2&-1\\4&-4&3&-2\end{pmatrix}$

第1行分别乘(-1),(-4)加到第2,3行

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

第2行乘2加到第1行

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ，所以矩阵的等价标准形是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.解 对矩阵A实施初等变换，$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

第1行分别乘(-1),(-4)加到第2,3行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 15 & -6 \end{pmatrix}$$

习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

第2行乘2加到第1行

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ，所以矩阵的等价标准形是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.解 对矩阵A实施初等变换， $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

第1行分别乘(-1),(-4)加到第2,3行　　第2行乘(-3)加到第3行

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 15 & -6 \end{pmatrix}$$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

$$\xrightarrow{\text{第2行乘2加到第1行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ，所以矩阵的等价标准形是$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.解 对矩阵A实施初等变换，$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{\text{第1行分别乘(-1),(-4)加到第2,3行}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 15 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2行乘(-3)加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

第2行乘2加到第1行

$$\to\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$ ，所以矩阵的等价标准形是 $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

2.解 对矩阵A实施初等变换，$\begin{pmatrix}1&-1&-3&1\\1&-1&2&-1\\4&-4&3&-2\end{pmatrix}$

第1行分别乘(-1),(-4)加到第2,3行　　第2行乘(-3)加到第3行

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&-3&1\\0&0&5&-2\\0&0&15&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-3&1\\0&0&5&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以矩阵A的秩$r(A)=2$.

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

对矩阵B实施初等变换， $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

对矩阵B实施初等变换, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

第1行分别乘(-3),(-4)加到第2,3行

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

对矩阵B实施初等变换，$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

第1行分别乘(-3),(-4)加到第2,3行

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

对矩阵B实施初等变换，$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

第1行分别乘(-3),(-4)加到第2,3行　　第2行乘(-1)加到第3行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

对矩阵B实施初等变换，$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

第1行分别乘(-3),(-4)加到第2,3行　　第2行乘(-1)加到第3行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

对矩阵B实施初等变换，$\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 0\\ 3 & -2 & 0 & 1\\ 4 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$

第1行分别乘(-3),(-4)加到第2,3行　　第2行乘(-1)加到第3行

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 0\\ 0 & -11 & 6 & 1\\ 0 & -11 & 6 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 0\\ 0 & -11 & 6 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

所以矩阵B的秩$r(B)=2.$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

对矩阵B实施初等变换，$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

第1行分别乘(-3),(-4)加到第2,3行　　第2行乘(-1)加到第3行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以矩阵B的秩$r(B)=2$.

同阶矩阵A，B有相同的秩，所以A与B等价.

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

对矩阵B实施初等变换，$\begin{pmatrix}1&3&-2&0\\3&-2&0&1\\4&1&-2&1\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{\text{第1行分别乘(-3),(-4)加到第2,3行}}\begin{pmatrix}1&3&-2&0\\0&-11&6&1\\0&-11&6&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第2行乘(-1)加到第3行}}\begin{pmatrix}1&3&-2&0\\0&-11&6&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以矩阵B的秩$r(B)=2$.

同阶矩阵A，B有相同的秩，所以A与B等价.

3.解

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

对矩阵B实施初等变换，$\begin{pmatrix}1&3&-2&0\\3&-2&0&1\\4&1&-2&1\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{\text{第1行分别乘(-3),(-4)加到第2,3行}}\begin{pmatrix}1&3&-2&0\\0&-11&6&1\\0&-11&6&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第2行乘(-1)加到第3行}}\begin{pmatrix}1&3&-2&0\\0&-11&6&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以矩阵B的秩$r(B)=2.$

同阶矩阵A，B有相同的秩，所以A与B等价.

3.解 等价、相似、合同都是两个同阶方阵之间的关系，且两个矩阵相似，则它们一定等价；两个矩阵合同，则它们也一定等价；

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

对矩阵B实施初等变换，$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

第1行分别乘(-3),(-4)加到第2,3行　　第2行乘(-1)加到第3行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以矩阵B的秩$r(B)=2$.

同阶矩阵A, B有相同的秩，所以A与B等价.

3.解 等价、相似、合同都是两个同阶方阵之间的关系，且两个矩阵相似，则它们一定等价；两个矩阵合同，则它们也一定等价；矩阵等价是两个同阶矩阵之间的关系，不一定是两个同阶方阵.

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

对矩阵B实施初等变换，$\begin{pmatrix}1&3&-2&0\\3&-2&0&1\\4&1&-2&1\end{pmatrix}$

第1行分别乘(-3),(-4)加到第2,3行　　第2行乘(-1)加到第3行

$$\to\begin{pmatrix}1&3&-2&0\\0&-11&6&1\\0&-11&6&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&-2&0\\0&-11&6&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以矩阵B的秩$r(B)=2$.

同阶矩阵A, B有相同的秩，所以A与B等价.

3.解 等价、相似、合同都是两个同阶方阵之间的关系，且两个矩阵相似，则它们一定等价；两个矩阵合同，则它们也一定等价；矩阵等价是两个同阶矩阵之间的关系，不一定是两个同阶方阵. 即使是两个同阶方阵，等价的矩阵也不一定相似或者合同.

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

4.解

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

4.解 因为$P^{-1}BP=A$，所以$BP=PA$.

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

4.解 因为$P^{-1}BP=A$，所以$BP=PA$.

而$BP=\begin{pmatrix}B\eta_1 & B\eta_2 & B\eta_3\end{pmatrix}$，$PA=\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

4.解 因为$P^{-1}BP=A$，所以$BP=PA$.

而$BP=\begin{pmatrix}B\eta_1 & B\eta_2 & B\eta_3\end{pmatrix}$，$PA=\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\eta_1 & 2\eta_2 & 3\eta_3\end{pmatrix}$,

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

4.解 因为$P^{-1}BP=A$，所以$BP=PA$.

而$BP=\begin{pmatrix}B\eta_1 & B\eta_2 & B\eta_3\end{pmatrix}$，$PA=\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\eta_1 & 2\eta_2 & 3\eta_3\end{pmatrix}$，所以$B\eta_1=\eta_1$, $B\eta_2=2\eta_2$, $B\eta_3=3\eta_3$.

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

4.解 因为$P^{-1}BP=A$，所以$BP=PA$.

而$BP=\begin{pmatrix} B\eta_1 & B\eta_2 & B\eta_3 \end{pmatrix}$，$PA=\begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \eta_1 & 2\eta_2 & 3\eta_3 \end{pmatrix}$，所以$B\eta_1=\eta_1$，$B\eta_2=2\eta_2$，$B\eta_3=3\eta_3$.

所以$BP_1=B\begin{pmatrix} \eta_2 & \eta_3 & \eta_1 \end{pmatrix}$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

4.解 因为$P^{-1}BP=A$，所以$BP=PA$.

而$BP=\begin{pmatrix}B\eta_1 & B\eta_2 & B\eta_3\end{pmatrix}$，$PA=\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\eta_1 & 2\eta_2 & 3\eta_3\end{pmatrix}$，所以$B\eta_1=\eta_1,\ B\eta_2=2\eta_2,\ B\eta_3=3\eta_3.$

所以$BP_1=B\begin{pmatrix}\eta_2 & \eta_3 & \eta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B\eta_2 & B\eta_3 & B\eta_1\end{pmatrix}$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

4.解 因为$P^{-1}BP=A$，所以$BP=PA$.

而$BP=\begin{pmatrix}B\eta_1 & B\eta_2 & B\eta_3\end{pmatrix}$，$PA=\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\eta_1 & 2\eta_2 & 3\eta_3\end{pmatrix}$，所以$B\eta_1=\eta_1$, $B\eta_2=2\eta_2$, $B\eta_3=3\eta_3$.

所以$BP_1=B\begin{pmatrix}\eta_2 & \eta_3 & \eta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B\eta_2 & B\eta_3 & B\eta_1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2\eta_2 & 3\eta_3 & \eta_1\end{pmatrix}$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

4.解 因为$P^{-1}BP=A$，所以$BP=PA$.

而$BP=\begin{pmatrix}B\eta_1 & B\eta_2 & B\eta_3\end{pmatrix}$，$PA=\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\eta_1 & 2\eta_2 & 3\eta_3\end{pmatrix}$，所以$B\eta_1=\eta_1$, $B\eta_2=2\eta_2$, $B\eta_3=3\eta_3$.

所以$BP_1=B\begin{pmatrix}\eta_2 & \eta_3 & \eta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B\eta_2 & B\eta_3 & B\eta_1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2\eta_2 & 3\eta_3 & \eta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_2 & \eta_3 & \eta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

4.解 因为$P^{-1}BP=A$，所以$BP=PA$.

而$BP=\begin{pmatrix}B\eta_1 & B\eta_2 & B\eta_3\end{pmatrix}$，$PA=\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\eta_1 & 2\eta_2 & 3\eta_3\end{pmatrix}$，所以$B\eta_1=\eta_1$，$B\eta_2=2\eta_2$，$B\eta_3=3\eta_3$.

所以$BP_1=B\begin{pmatrix}\eta_2 & \eta_3 & \eta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B\eta_2 & B\eta_3 & B\eta_1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2\eta_2 & 3\eta_3 & \eta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_2 & \eta_3 & \eta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$=P_1\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

4.解 因为$P^{-1}BP=A$，所以$BP=PA$.

而$BP=\begin{pmatrix}B\eta_1 & B\eta_2 & B\eta_3\end{pmatrix}$，$PA=\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\eta_1 & 2\eta_2 & 3\eta_3\end{pmatrix}$，所以$B\eta_1=\eta_1$，$B\eta_2=2\eta_2$，$B\eta_3=3\eta_3$.

所以$BP_1=B\begin{pmatrix}\eta_2 & \eta_3 & \eta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B\eta_2 & B\eta_3 & B\eta_1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}2\eta_2 & 3\eta_3 & \eta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_2 & \eta_3 & \eta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$=P_1\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，所以$P_1^{-1}BP_1=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

宿州学院 SUZHOU UNIVERSITY

习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

$$BP_2 = B\begin{pmatrix} \eta_3 & \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix}$$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

$$BP_2 = B\begin{pmatrix}\eta_3 & \eta_1 & \eta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}B\eta_3 & B\eta_1 & B\eta_2\end{pmatrix}$$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

$$BP_2 = B\begin{pmatrix}\eta_3 & \eta_1 & \eta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}B\eta_3 & B\eta_1 & B\eta_2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3\eta_3 & \eta_1 & 2\eta_2\end{pmatrix}$$

习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

$$BP_2 = B\begin{pmatrix}\eta_3 & \eta_1 & \eta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}B\eta_3 & B\eta_1 & B\eta_2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3\eta_3 & \eta_1 & 2\eta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\eta_3 & \eta_1 & \eta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

$$BP_2 = B\begin{pmatrix}\eta_3 & \eta_1 & \eta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}B\eta_3 & B\eta_1 & B\eta_2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3\eta_3 & \eta_1 & 2\eta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\eta_3 & \eta_1 & \eta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$= P_2\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

$$BP_2=B\begin{pmatrix}\eta_3 & \eta_1 & \eta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B\eta_3 & B\eta_1 & B\eta_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3\eta_3 & \eta_1 & 2\eta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_3 & \eta_1 & \eta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$=P_2\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}，\text{所以}P_2^{-1}BP_2=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

$$BP_2=B\begin{pmatrix}\eta_3 & \eta_1 & \eta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B\eta_3 & B\eta_1 & B\eta_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3\eta_3 & \eta_1 & 2\eta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_3 & \eta_1 & \eta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$=P_2\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}\text{，所以}P_2^{-1}BP_2=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$BP_3=B\begin{pmatrix}\eta_3 & \eta_2 & \eta_1\end{pmatrix}$$

习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

$$BP_2 = B\begin{pmatrix}\eta_3 & \eta_1 & \eta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}B\eta_3 & B\eta_1 & B\eta_2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3\eta_3 & \eta_1 & 2\eta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\eta_3 & \eta_1 & \eta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$= P_2\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}，\text{所以} P_2^{-1}BP_2 = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$BP_3 = B\begin{pmatrix}\eta_3 & \eta_2 & \eta_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}B\eta_3 & B\eta_2 & B\eta_1\end{pmatrix}$$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

$$BP_2=B\begin{pmatrix}\eta_3 & \eta_1 & \eta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B\eta_3 & B\eta_1 & B\eta_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3\eta_3 & \eta_1 & 2\eta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_3 & \eta_1 & \eta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$=P_2\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}，\text{所以}P_2^{-1}BP_2=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$BP_3=B\begin{pmatrix}\eta_3 & \eta_2 & \eta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B\eta_3 & B\eta_2 & B\eta_1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3\eta_3 & 2\eta_2 & \eta_1\end{pmatrix}$$

宿州学院 SUZHOU UNIVERSITY

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

$$BP_2 = B\begin{pmatrix}\eta_3 & \eta_1 & \eta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}B\eta_3 & B\eta_1 & B\eta_2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3\eta_3 & \eta_1 & 2\eta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\eta_3 & \eta_1 & \eta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$= P_2\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}，\text{所以} P_2^{-1}BP_2 = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$BP_3 = B\begin{pmatrix}\eta_3 & \eta_2 & \eta_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}B\eta_3 & B\eta_2 & B\eta_1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3\eta_3 & 2\eta_2 & \eta_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\eta_3 & \eta_2 & \eta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

习题5.1$(P_{175}-P_{175})$

$$= P_3 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

$$=P_3\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}，\text{所以}P_3^{-1}BP_3=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

$$=P_3\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad 所以P_3^{-1}BP_3=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$\det B=6.$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

$$=P_3\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad 所以 P_3^{-1}BP_3=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$\det B=6$.

5.因为$P=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{pmatrix}$,

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

$$=P_3\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}，所以P_3^{-1}BP_3=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$\det B=6.$

5.因为$P=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2&\alpha_2&\alpha_3\end{pmatrix}$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

$$=P_3\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}，\text{所以}P_3^{-1}BP_3=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$\det B=6.$

5.因为$P=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2&\alpha_2&\alpha_3\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

$$=P_3\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}，\text{所以}P_3^{-1}BP_3=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$\det B=6.$

5.因为$P=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2&\alpha_2&\alpha_3\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

习题5.1($P_{175} - P_{175}$)

$$= P_3 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}，\quad 所以 P_3^{-1} B P_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det B = 6.$

5.因为$P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}$，$Q = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$所以 Q^T A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T P^T A P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

$$
=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}
$$

习题5.1($P_{175}-P_{175}$)

$$
=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.
$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

1.解

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

1.解 (1)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

1.解 (1)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)\ .$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

1.解 (1)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)\ .$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=1;\ \lambda_2=-1.$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

1.解 (1)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)\ .$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=1;\ \lambda_2=-1.$

将$\lambda_1=1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

1.解 (1)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)\ .$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=1;\ \lambda_2=-1.$

将$\lambda_1=1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\ 有基础解系\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

1.解 (1)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)\ .$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=1;\ \lambda_2=-1.$

将$\lambda_1=1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\quad 有基础解系\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_1=1$的全部特征向量为

$$\left\{\ k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\Big|k_1,k_2\text{不同时为0}\ \right\}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda_1=-1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda_1=-1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\quad 有基础解系\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda_1=-1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_1=-1$的全部特征向量为

$$\left\{k\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\middle|k\text{是任意不为0的数}\right\}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda_1=-1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_1=-1$的全部特征向量为

$$\left\{k\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\middle|k\text{是任意不为0的数}\right\}$$

(2)矩阵的特征多项式为 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\0&\lambda&-1\\0&0&\lambda\end{vmatrix}$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda_1=-1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_1=-1$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}$$

(2)矩阵的特征多项式为 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^3.$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda_1=-1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_1=-1$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}$$

(2)矩阵的特征多项式为 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^3.$

所以矩阵有特征值$\lambda=0.$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\quad \text{有基础解系}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda=0$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda=0$的全部特征向量为

$$\left\{\ k\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\ \middle|\ k\text{是任意不为0的数}\ \right\}$$

(3)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\-1&\lambda&-1\\0&-1&\lambda\end{vmatrix}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\quad \text{有基础解系}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda=0$的全部特征向量为

$$\left\{\ k\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\middle|\,k\text{是任意不为0的数}\ \right\}$$

(3)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\-1&\lambda&-1\\0&-1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+\sqrt{2})(\lambda-\sqrt{2}).$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda=0$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}$$

(3)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\-1&\lambda&-1\\0&-1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+\sqrt{2})(\lambda-\sqrt{2}).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=-\sqrt{2},\ \lambda_3=\sqrt{2}.$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda_1=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda_1=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\ 有基础解系\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda_1=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_1=0$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda_1=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_1=0$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}$$

将$\lambda_2=-\sqrt{2}$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda_1=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_1=0$的全部特征向量为

$$\left\{k\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\middle|k\text{是任意不为0的数}\right\}$$

将$\lambda_2=-\sqrt{2}$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-\sqrt{2}&-1&0\\-1&-\sqrt{2}&-1\\0&-1&-\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\1\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

习题5.2$(P_{175}-P_{178})$

所以属于特征值$\lambda_2=-\sqrt{2}$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_2=-\sqrt{2}$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}$$

将$\lambda_3=\sqrt{2}$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_2=-\sqrt{2}$的全部特征向量为

$$\left\{\ k\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 1\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\Bigg|k\text{是任意不为0的数}\ \right\}$$

将$\lambda_3=\sqrt{2}$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -1 & 0\\ -1 & \sqrt{2} & -1\\ 0 & -1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}，\quad \text{有基础解系}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 1\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

习题5.2$(P_{175}-P_{178})$

所以属于特征值$\lambda_2=-\sqrt{2}$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}$$

将$\lambda_3=\sqrt{2}$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\quad \text{有基础解系}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_3=\sqrt{2}$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

(4)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

(4)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-3).$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

(4)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-3).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=3.$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

(4)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-3).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=3.$

将$\lambda_1=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

(4)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-3).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 3.$

将$\lambda_1 = 0$代入齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = 0$，得

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

(4)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-3).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=3.$

将$\lambda_1=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}，\quad \text{有基础解系}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_1=0$的全部特征向量为

$$\left\{k_1\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\middle|k_1,k_2\text{不同时为0}\right\}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda_2=3$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda_2=3$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}，\quad 有基础解系\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda_2=3$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_2=3$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}.$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda_2=3$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_2=3$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}.$$

(5)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda-8 & -2 \\ 2 & 14 & \lambda+3 \end{vmatrix}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda_2=3$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_2=3$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}.$$

(5)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda-8 & -2 \\ 2 & 14 & \lambda+3 \end{vmatrix}=(\lambda-3)^2(\lambda-1).$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda_2=3$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\text{，有基础解系}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_2=3$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}.$$

(5)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda-8 & -2 \\ 2 & 14 & \lambda+3 \end{vmatrix}=(\lambda-3)^2(\lambda-1).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=3,\ \lambda_2=1.$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda_1=3$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & -5 & -2 \\ 2 & 14 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda_1=3$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & -5 & -2 \\ 2 & 14 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda_1=3$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & -5 & -2 \\ 2 & 14 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_1=3$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}.$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda_1=3$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}1 & -3 & -2\\ -1 & -5 & -2\\ 2 & 14 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}，\quad \text{有基础解系}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_1=3$的全部特征向量为

$$\left\{k\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}\middle| k\text{是任意不为0的数}\right\}.$$

将$\lambda_2=1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-1 & -3 & -2\\ -1 & -9 & -2\\ 2 & 14 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}，$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda_1=3$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & -5 & -2 \\ 2 & 14 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\quad \text{有基础解系}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_1=3$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}.$$

将$\lambda_2=1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -1 & -9 & -2 \\ 2 & 14 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\quad \text{有基础解系}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

宿州学院 SUZHOU UNIVERSITY

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_2=1$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}.$$

习题5.2$(P_{175}-P_{178})$

所以属于特征值$\lambda_2=1$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}.$$

(6)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-6 & -2 & -4\\ -2 & \lambda-3 & -2\\ -4 & -2 & \lambda-6\end{vmatrix}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_2=1$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}.$$

(6)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-6 & -2 & -4\\ -2 & \lambda-3 & -2\\ -4 & -2 & \lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-11).$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_2=1$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}.$$

(6)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-6 & -2 & -4\\ -2 & \lambda-3 & -2\\ -4 & -2 & \lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-11).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=2,\ \lambda_2=11.$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_2=1$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}.$$

(6)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-6 & -2 & -4\\ -2 & \lambda-3 & -2\\ -4 & -2 & \lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-11).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=2,\ \lambda_2=11.$

将$\lambda_1=2$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-4 & -2 & -4\\ -2 & -1 & -2\\ -4 & -2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_2=1$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}.$$

(6)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-6 & -2 & -4\\ -2 & \lambda-3 & -2\\ -4 & -2 & \lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-11).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=2,\ \lambda_2=11.$

将$\lambda_1=2$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-4 & -2 & -4\\ -2 & -1 & -2\\ -4 & -2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\ \text{有基础解系}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_1 = 2$的全部特征向量为

$$\left\{ k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k_1, k_2\text{不同时为}0 \right\}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_1=2$的全部特征向量为

$$\left\{ k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \middle| k_1,k_2\text{不同时为0} \right\}$$

将$\lambda_2=11$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}5&-2&-4\\-2&8&-2\\-4&-2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_1=2$的全部特征向量为

$$\left\{ k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \middle| k_1,k_2\text{不同时为0} \right\}$$

将$\lambda_2=11$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}5&-2&-4\\-2&8&-2\\-4&-2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}.$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_1=2$的全部特征向量为

$$\left\{ k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \middle| k_1,k_2\text{不同时为0} \right\}$$

将$\lambda_2=11$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}5&-2&-4\\-2&8&-2\\-4&-2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_2=11$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}.$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

(7)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -3\\ -2 & \lambda-1 & -3\\ -3 & -3 & \lambda-6\end{vmatrix}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

(7)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -3\\ -2 & \lambda-1 & -3\\ -3 & -3 & \lambda-6\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-9)(\lambda+1).$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

(7)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda-1 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda-6 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-9)(\lambda+1).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=9,\ \lambda_3=-1.$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

(7)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -3\\ -2 & \lambda-1 & -3\\ -3 & -3 & \lambda-6\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-9)(\lambda+1).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=9,\ \lambda_3=-1.$

将$\lambda_1=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-1 & -2 & -3\\ -2 & -1 & -3\\ -3 & -3 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

(7)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -3\\ -2 & \lambda-1 & -3\\ -3 & -3 & \lambda-6\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-9)(\lambda+1).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=9,\ \lambda_3=-1.$

将$\lambda_1=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-1 & -2 & -3\\ -2 & -1 & -3\\ -3 & -3 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

(7)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -3\\ -2 & \lambda-1 & -3\\ -3 & -3 & \lambda-6\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-9)(\lambda+1).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=9,\ \lambda_3=-1.$

将$\lambda_1=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-1 & -2 & -3\\ -2 & -1 & -3\\ -3 & -3 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_1=0$的全部特征向量为

$$\left\{k\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}\middle|k\text{是任意不为0的数}\right\}.$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda_2=9$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & -3 \\ -2 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda_2=9$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得
$\begin{pmatrix} 8 & -2 & -3 \\ -2 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，有基础解系$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda_2=9$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & -3 \\ -2 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_2=9$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}.$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda_2=9$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & -3 \\ -2 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\quad 有基础解系\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_2=9$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| k是任意不为0的数 \right\}.$$

将$\lambda_3=-1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -2 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

将$\lambda_2=9$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & -3 \\ -2 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\quad 有基础解系\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_2=9$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| k是任意不为0的数 \right\}.$$

将$\lambda_3=-1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -2 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\quad 有基础解系\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_3=-1$的全部特征向量为

$$\left\{ \quad k\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \quad \right\}.$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_3=-1$的全部特征向量为

$$\left\{\; k\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \;\middle|\; k\text{是任意不为0的数} \;\right\}.$$

2.解

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_3=-1$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}.$$

2.解 矩阵A的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1\\ 0 & \lambda-2 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_3=-1$的全部特征向量为

$$\left\{\ k\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\ \middle|\ k\text{是任意不为0的数}\ \right\}.$$

2.解 矩阵A的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1\\ 0 & \lambda-2 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3).$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_3=-1$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}.$$

2.解 矩阵A的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3).$$

所以矩阵A有特征值$\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=3.$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_3=-1$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}.$$

2.解 矩阵A的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1\\ 0 & \lambda-2 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3).$$

所以矩阵A有特征值$\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=3.$

矩阵A相似于对角阵，即可以对角化.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_3=-1$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}.$$

2.解 矩阵A的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1\\ 0 & \lambda-2 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3).$$

所以矩阵A有特征值$\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$.

矩阵A相似于对角阵，即可以对角化.因为3阶方阵有3个不同的特征值.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

3.解

习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

3.解 矩阵A的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda - 4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

3.解 矩阵A的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+3a+18).$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

3.解 矩阵A的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 3\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+3a+18).$$

A的特征方程(特征多项式)有2重根当且仅当$\lambda=2$是
$\lambda^2-8\lambda+3a+18=0$的根,
或者$\lambda^2-8\lambda+3a+18=0$ 有重根.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

3.解 矩阵A的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 3\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+3a+18).$$

A的特征方程(特征多项式)有2重根当且仅当$\lambda=2$是$\lambda^2-8\lambda+3a+18=0$的根，

或者$\lambda^2-8\lambda+3a+18=0$ 有重根.

若$\lambda=2$是$\lambda^2-8\lambda+3a+18=0$的根，则$a=-2$.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

3.解 矩阵A的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 3\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+3a+18).$$

A的特征方程(特征多项式)有2重根当且仅当$\lambda=2$是

$\lambda^2-8\lambda+3a+18=0$的根,

或者$\lambda^2-8\lambda+3a+18=0$ 有重根.

若$\lambda=2$是$\lambda^2-8\lambda+3a+18=0$的根,则$a=-2$.这时,$A$的另一个特征值为$\lambda_2=6$;

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

3.解 矩阵A的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 3\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+3a+18).$$

A的特征方程(特征多项式)有2重根当且仅当$\lambda=2$是$\lambda^2-8\lambda+3a+18=0$的根，

或者$\lambda^2-8\lambda+3a+18=0$ 有重根.

若$\lambda=2$是$\lambda^2-8\lambda+3a+18=0$的根，则$a=-2$.这时，$A$的另一个特征值为$\lambda_2=6$；

若$\lambda^2-8\lambda+3a+18=0$ 有重根，则$a=-\frac{2}{3}$.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

3.解 矩阵A的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 3\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+3a+18).$$

A的特征方程(特征多项式)有2重根当且仅当$\lambda=2$是$\lambda^2-8\lambda+3a+18=0$的根，

或者$\lambda^2-8\lambda+3a+18=0$ 有重根.

若$\lambda=2$是$\lambda^2-8\lambda+3a+18=0$的根，则$a=-2$.这时，$A$的另一个特征值为$\lambda_2=6$；

若$\lambda^2-8\lambda+3a+18=0$ 有重根，则$a=-\frac{2}{3}$.这时，A的二重特征值为$\lambda_2=4$.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

当$a=-2$时，矩阵A有二重特征值$\lambda_1=2$，将$\lambda_1=2$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

当$a=-2$时，矩阵A有二重特征值$\lambda_1=2$，将$\lambda_1=2$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

当$a=-2$时，矩阵A有二重特征值$\lambda_1=2$，将$\lambda_1=2$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

这时矩阵A的二重特征值有两个线性无关的特征向量，而矩阵A另一个特征值为$\lambda_2=6$，

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

当$a=-2$时，矩阵A有二重特征值$\lambda_1=2$，将$\lambda_1=2$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

这时矩阵A的二重特征值有两个线性无关的特征向量，而矩阵A另一个特征值为$\lambda_2=6$，所以3阶方阵A有3个线性无关的特征向量，所以A可以对角化.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

当$a=-2$时，矩阵A有二重特征值$\lambda_1=2$，将$\lambda_1=2$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

这时矩阵A的二重特征值有两个线性无关的特征向量，而矩阵A另一个特征值为$\lambda_2=6$，所以3阶方阵A有3个线性无关的特征向量，所以A可以对角化.

当$a=-\frac{2}{3}$时，矩阵A有二重特征值$\lambda_2=4$，将$\lambda_2=4$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

当$a=-2$时，矩阵A有二重特征值$\lambda_1=2$，将$\lambda_1=2$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}1&-2&3\\1&-2&3\\-1&2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}.$$

这时矩阵A的二重特征值有两个线性无关的特征向量，而矩阵A另一个特征值为$\lambda_2=6$，所以3阶方阵A有3个线性无关的特征向量，所以A可以对角化.

当$a=-\frac{2}{3}$时，矩阵A有二重特征值$\lambda_2=4$，将$\lambda_2=4$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}3&-2&3\\1&0&3\\-1&\frac{2}{3}&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix}-3\\-3\\1\end{pmatrix}.$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

这时，属于二重特征值$\lambda_2=4$线性无关的特征向量只有1个，

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

这时，属于二重特征值$\lambda_2=4$线性无关的特征向量只有1个，所以A不能对角化.

即，$a=-\frac{2}{3}$时矩阵不能对角化.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

这时，属于二重特征值$\lambda_2=4$线性无关的特征向量只有1个，所以A不能对角化.

即，$a=-\frac{2}{3}$时矩阵不能对角化.

4.证明

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

这时，属于二重特征值$\lambda_2=4$线性无关的特征向量只有1个，所以A不能对角化.

即，$a=-\frac{2}{3}$时矩阵不能对角化.

4.证明 矩阵A的特征多项式为 $|\lambda I-A|$,

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

这时，属于二重特征值$\lambda_2=4$线性无关的特征向量只有1个，所以A不能对角化.

即，$a=-\frac{2}{3}$时矩阵不能对角化.

4.证明 矩阵A的特征多项式为$|\lambda I-A|$，由于转置不改变行列式的值，所以

$|\lambda I-A|=|\lambda I-A|^T$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

这时，属于二重特征值$\lambda_2=4$线性无关的特征向量只有1个，所以A不能对角化.

即，$a=-\frac{2}{3}$时矩阵不能对角化.

4.证明 矩阵A的特征多项式为$|\lambda I-A|$，由于转置不改变行列式的值，所以

$$|\lambda I-A|=|\lambda I-A|^T=|(\lambda I)^T-A^T|$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

这时，属于二重特征值$\lambda_2=4$线性无关的特征向量只有1个，所以A不能对角化.

即，$a=-\frac{2}{3}$时矩阵不能对角化.

4.证明 矩阵A的特征多项式为 $|\lambda I-A|$，由于转置不改变行列式的值，所以

$|\lambda I-A|=|\lambda I-A|^T=|(\lambda I)^T-A^T|=|\lambda I-A^T|$，

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

这时，属于二重特征值$\lambda_2=4$线性无关的特征向量只有1个，所以A不能对角化.

即，$a=-\frac{2}{3}$时矩阵不能对角化.

4.证明 矩阵A的特征多项式为 $|\lambda I-A|$，由于转置不改变行列式的值，所以

$|\lambda I-A|=|\lambda I-A|^T=|(\lambda I)^T-A^T|=|\lambda I-A^T|$，

而矩阵A^T的特征多项式为$|\lambda I-A^T|$，所以A与A^T有相同的特征多项式.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

这时，属于二重特征值$\lambda_2=4$线性无关的特征向量只有1个，所以A不能对角化.

即，$a=-\frac{2}{3}$时矩阵不能对角化.

4.证明 矩阵A的特征多项式为 $|\lambda I-A|$，由于转置不改变行列式的值，所以

$|\lambda I-A|=|\lambda I-A|^T=|(\lambda I)^T-A^T|=|\lambda I-A^T|$，

而矩阵A^T的特征多项式为$|\lambda I-A^T|$，所以A与A^T有相同的特征多项式.

矩阵的特征值为其特征多项式的根，A与A^T有相同的特征多项式，所以有相同的特征值.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

这时，属于二重特征值$\lambda_2=4$线性无关的特征向量只有1个，所以A不能对角化.

即，$a=-\frac{2}{3}$时矩阵不能对角化.

4.证明 矩阵A的特征多项式为$|\lambda I-A|$，由于转置不改变行列式的值，所以

$$|\lambda I-A|=|\lambda I-A|^T=|(\lambda I)^T-A^T|=|\lambda I-A^T|,$$

而矩阵A^T的特征多项式为$|\lambda I-A^T|$，所以A与A^T有相同的特征多项式.

矩阵的特征值为其特征多项式的根，A与A^T有相同的特征多项式，所以有相同的特征值.

5.证明

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

这时，属于二重特征值$\lambda_2=4$线性无关的特征向量只有1个，所以A不能对角化.

即，$a=-\frac{2}{3}$时矩阵不能对角化.

4.证明 矩阵A的特征多项式为$|\lambda I-A|$，由于转置不改变行列式的值，所以

$|\lambda I-A|=|\lambda I-A|^T=|(\lambda I)^T-A^T|=|\lambda I-A^T|$,

而矩阵A^T的特征多项式为$|\lambda I-A^T|$，所以A与A^T有相同的特征多项式.

矩阵的特征值为其特征多项式的根，A与A^T有相同的特征多项式，所以有相同的特征值.

5.证明 因为A可逆，所以

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

这时，属于二重特征值$\lambda_2=4$线性无关的特征向量只有1个，所以A不能对角化.

即，$a=-\frac{2}{3}$时矩阵不能对角化.

4.证明 矩阵A的特征多项式为 $|\lambda I-A|$，由于转置不改变行列式的值，所以

$|\lambda I-A|=|\lambda I-A|^T=|(\lambda I)^T-A^T|=|\lambda I-A^T|$，

而矩阵A^T的特征多项式为$|\lambda I-A^T|$，所以A与A^T有相同的特征多项式.

矩阵的特征值为其特征多项式的根，A与A^T有相同的特征多项式，所以有相同的特征值.

5.证明 因为A可逆，所以 $A^{-1}(AB)A=$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

这时，属于二重特征值$\lambda_2=4$线性无关的特征向量只有1个，所以A不能对角化.

即，$a=-\frac{2}{3}$时矩阵不能对角化.

4.证明 矩阵A的特征多项式为 $|\lambda I-A|$，由于转置不改变行列式的值，所以

$|\lambda I-A|=|\lambda I-A|^T=|(\lambda I)^T-A^T|=|\lambda I-A^T|$，

而矩阵A^T的特征多项式为$|\lambda I-A^T|$，所以A与A^T有相同的特征多项式.

矩阵的特征值为其特征多项式的根，A与A^T有相同的特征多项式，所以有相同的特征值.

5.证明 因为A可逆，所以 $A^{-1}(AB)A=(A^{-1}A)BA=$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

这时，属于二重特征值$\lambda_2=4$线性无关的特征向量只有1个，所以A不能对角化.

即，$a=-\frac{2}{3}$时矩阵不能对角化.

4.证明 矩阵A的特征多项式为 $|\lambda I-A|$，由于转置不改变行列式的值，所以

$|\lambda I-A|=|\lambda I-A|^T=|(\lambda I)^T-A^T|=|\lambda I-A^T|$，

而矩阵A^T的特征多项式为$|\lambda I-A^T|$，所以A与A^T有相同的特征多项式.

矩阵的特征值为其特征多项式的根，A与A^T有相同的特征多项式，所以有相同的特征值.

5.证明 因为A可逆，所以 $A^{-1}(AB)A=(A^{-1}A)BA=BA$，

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

这时，属于二重特征值$\lambda_2=4$线性无关的特征向量只有1个，所以A不能对角化.

即，$a=-\frac{2}{3}$时矩阵不能对角化.

4.证明 矩阵A的特征多项式为 $|\lambda I-A|$，由于转置不改变行列式的值，所以

$|\lambda I-A|=|\lambda I-A|^T=|(\lambda I)^T-A^T|=|\lambda I-A^T|$，

而矩阵A^T的特征多项式为$|\lambda I-A^T|$，所以A与A^T有相同的特征多项式.

矩阵的特征值为其特征多项式的根，A与A^T有相同的特征多项式，所以有相同的特征值.

5.证明 因为A可逆，所以 $A^{-1}(AB)A=(A^{-1}A)BA=BA$，

所以AB与BA相似.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

6.证明

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

6.证明 因为A_1与B_1相似，

所以存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}A_1P=B_1$.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

6.证明 因为A_1与B_1相似，

所以存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}A_1P=B_1$.

而A_2与B_2相似，所以存在可逆矩阵Q，使得$Q^{-1}A_2Q=B_2$.

构作分块矩阵$T=\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$，则

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

6.证明 因为A_1与B_1相似，

所以存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}A_1P=B_1$.

而A_2与B_2相似，所以存在可逆矩阵Q，使得$Q^{-1}A_2Q=B_2$.

构作分块矩阵$T=\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$$

宿州学院 SUZHOU UNIVERSITY

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

6.证明 因为A_1与B_1相似，

所以存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}A_1P=B_1$.

而A_2与B_2相似，所以存在可逆矩阵Q，使得$Q^{-1}A_2Q=B_2$.

构作分块矩阵$T=\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} PP^{-1} & 0 \\ 0 & QQ^{-1} \end{pmatrix}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

6.证明 因为A_1与B_1相似,
所以存在可逆矩阵P,使得$P^{-1}A_1P=B_1$.
而A_2与B_2相似,所以存在可逆矩阵Q,使得$Q^{-1}A_2Q=B_2$.
构作分块矩阵$T=\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$,则

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} PP^{-1} & 0 \\ 0 & QQ^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

6.证明 因为A_1与B_1相似，

所以存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}A_1P=B_1$.

而A_2与B_2相似，所以存在可逆矩阵Q，使得$Q^{-1}A_2Q=B_2$.

构作分块矩阵$T=\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} PP^{-1} & 0 \\ 0 & QQ^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

即T可逆，且$T^{-1}=\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

6.证明 因为A_1与B_1相似，

所以存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}A_1P=B_1$.

而A_2与B_2相似，所以存在可逆矩阵Q，使得$Q^{-1}A_2Q=B_2$.

构作分块矩阵$T=\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} PP^{-1} & 0 \\ 0 & QQ^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

即T可逆，且$T^{-1}=\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$. 这时，

$$T^{-1}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}T=$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

6.证明 因为A_1与B_1相似，

所以存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}A_1P=B_1$.

而A_2与B_2相似，所以存在可逆矩阵Q，使得$Q^{-1}A_2Q=B_2$.

构作分块矩阵$T=\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} PP^{-1} & 0 \\ 0 & QQ^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

即T可逆，且$T^{-1}=\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$. 这时，

$$T^{-1}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}T=\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

6.证明 因为A_1与B_1相似，

所以存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}A_1P=B_1$.

而A_2与B_2相似，所以存在可逆矩阵Q，使得$Q^{-1}A_2Q=B_2$.

构作分块矩阵$T=\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} PP^{-1} & 0 \\ 0 & QQ^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

即T可逆，且$T^{-1}=\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$. 这时，

$$T^{-1}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}T=\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} P^{-1}A_1P & 0 \\ 0 & Q^{-1}B_1Q \end{pmatrix}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

6.证明 因为A_1与B_1相似，

所以存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}A_1P=B_1$.

而A_2与B_2相似，所以存在可逆矩阵Q，使得$Q^{-1}A_2Q=B_2$.

构作分块矩阵$T=\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} PP^{-1} & 0 \\ 0 & QQ^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

即T可逆，且$T^{-1}=\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$. 这时，

$$T^{-1}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}T=\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} P^{-1}A_1P & 0 \\ 0 & Q^{-1}B_1Q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

所以，$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$相似.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

所以，$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$相似.

7.解

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

所以，$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$相似.

7.解 (1)因为p是矩阵A的一个特征向量，

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

所以，$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$相似.

7.解 (1)因为p是矩阵A的一个特征向量，所以存在数λ，使

得$Ap=\lambda p$.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

所以，$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$相似.

7.解 (1)因为p是矩阵A的一个特征向量，所以存在数λ，使得$Ap=\lambda p$. 所以
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

所以，$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$相似.

7.解 (1)因为p是矩阵A的一个特征向量，所以存在数λ，使得$Ap=\lambda p$. 所以$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，而

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2+a \\ 1+b \end{pmatrix},$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

所以，$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$相似.

7.解 (1)因为p是矩阵A的一个特征向量，所以存在数λ，使得$Ap=\lambda p$. 所以$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，而

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2+a \\ 1+b \end{pmatrix},$$

所以$\begin{pmatrix} -1 \\ 2+a \\ 1+b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}$,

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

所以，$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$相似.

7.解 (1)因为p是矩阵A的一个特征向量，所以存在数λ，使得$Ap=\lambda p$. 所以$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，而

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2+a \\ 1+b \end{pmatrix},$$

所以$\begin{pmatrix} -1 \\ 2+a \\ 1+b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}$，所以$\lambda=-1,\ a=-3,\ b=0.$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

所以，$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$相似.

7.解 (1)因为p是矩阵A的一个特征向量，所以存在数λ，使得$Ap=\lambda p$. 所以$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，而

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2+a \\ 1+b \end{pmatrix},$$

所以$\begin{pmatrix} -1 \\ 2+a \\ 1+b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}$，所以$\lambda=-1,\ a=-3,\ b=0$.

$\lambda=-1$为特征向量p对应的特征值.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

在$a=-3,\ b=0$时，矩阵A的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -2\\ -5 & \lambda+3 & -3\\ 1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

在$a=-3$, $b=0$时，矩阵A的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -2\\ -5 & \lambda+3 & -3\\ 1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3.$$

习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

在$a=-3$, $b=0$时，矩阵A的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda+3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^3.$$

所以矩阵A有三重特征值$\lambda_1 = -1$.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

在$a=-3,\ b=0$时，矩阵A的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -2\\ -5 & \lambda+3 & -3\\ 1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3.$$

所以矩阵A有三重特征值$\lambda_1=-1$.

将$\lambda_1=-1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-3 & 1 & -2\\ -5 & 2 & -3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

在$a=-3,\ b=0$时，矩阵A的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -2\\ -5 & \lambda+3 & -3\\ 1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3.$$

所以矩阵A有三重特征值$\lambda_1=-1$.

将$\lambda_1=-1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-3 & 1 & -2\\ -5 & 2 & -3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}，\quad 有基础解系\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

在$a=-3,\ b=0$时，矩阵A的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -2\\ -5 & \lambda+3 & -3\\ 1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3.$$

所以矩阵A有三重特征值$\lambda_1=-1.$

将$\lambda_1=-1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-3 & 1 & -2\\ -5 & 2 & -3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}，\quad 有基础解系\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.$$

矩阵A不能对角化.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

在$a=-3$, $b=0$时，矩阵A的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -2\\ -5 & \lambda+3 & -3\\ 1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3.$$

所以矩阵A有三重特征值$\lambda_1=-1$.

将$\lambda_1=-1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-3 & 1 & -2\\ -5 & 2 & -3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}，\quad 有基础解系\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.$$

矩阵A不能对角化.因为A只有一个三重特征值，且属于这个特征值线性无关的特征向量只有1个，而A是3阶方阵，

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

在$a=-3,\ b=0$时，矩阵A的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -2\\ -5 & \lambda+3 & -3\\ 1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3.$$

所以矩阵A有三重特征值$\lambda_1=-1$.

将$\lambda_1=-1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-3 & 1 & -2\\ -5 & 2 & -3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}，\quad 有基础解系\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.$$

矩阵A不能对角化.因为A只有一个三重特征值，且属于这个特征值线性无关的特征向量只有1个，而A是3阶方阵，所以A不能对角化.

习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

(2)矩阵A的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 0 \\ -8 & \lambda - 2 & -a \\ 0 & 0 & \lambda - 6 \end{vmatrix}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

(2)矩阵A的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 0\\ -8 & \lambda-2 & -a\\ 0 & 0 & \lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)^2(\lambda+2).$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

(2)矩阵A的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 0\\ -8 & \lambda-2 & -a\\ 0 & 0 & \lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)^2(\lambda+2).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=6,\ \lambda_2=-2$.其中$\lambda_1=6$是二重特征值.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

(2)矩阵A的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 0\\ -8 & \lambda-2 & -a\\ 0 & 0 & \lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)^2(\lambda+2).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=6,\ \lambda_2=-2$.其中$\lambda_1=6$是二重特征值.

由于矩阵A可以对角化，所以属于二重特征值$\lambda_1=6$有2个线性无关的特征向量.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

(2)矩阵A的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 0\\ -8 & \lambda-2 & -a\\ 0 & 0 & \lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)^2(\lambda+2).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=6,\ \lambda_2=-2$.其中$\lambda_1=6$是二重特征值.

由于矩阵A可以对角化，所以属于二重特征值$\lambda_1=6$有2个线性无关的特征向量.

将$\lambda_1=6$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -8 & 4 & -a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

(2)矩阵A的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 0\\ -8 & \lambda-2 & -a\\ 0 & 0 & \lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)^2(\lambda+2).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=6,\ \lambda_2=-2$.其中$\lambda_1=6$是二重特征值.

由于矩阵A可以对角化，所以属于二重特征值$\lambda_1=6$有2个线性无关的特征向量.

将$\lambda_1=6$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -8 & 4 & -a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$，基础解系含2个解$\Leftrightarrow a=0$.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

(2)矩阵A的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 0\\ -8 & \lambda-2 & -a\\ 0 & 0 & \lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)^2(\lambda+2).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=6,\ \lambda_2=-2.$其中$\lambda_1=6$是二重特征值.

由于矩阵A可以对角化，所以属于二重特征值$\lambda_1=6$有2个线性无关的特征向量.

将$\lambda_1=6$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -8 & 4 & -a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$ 基础解系含2个解$\Leftrightarrow a=0.$

所以矩阵A相似于对角阵D，则$a=0$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

在$a=0$时，将$\lambda_1=6$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，

得 $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

在$a=0$时，将$\lambda_1=6$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$,

得 $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 有基础解系 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

在$a=0$时，将$\lambda_1=6$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，

得 $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，有基础解系 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

将$\lambda_2=-2$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

在$a=0$时，将$\lambda_1=6$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，

得 $\begin{pmatrix}4&-2&0\\-8&4&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，有基础解系$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

将$\lambda_2=-2$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$\begin{pmatrix}-4&-2&0\\-8&-4&0\\0&0&-8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，有基础解系$\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

在$a=0$时，将$\lambda_1=6$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，

得 $\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -8 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，有基础解系$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

将$\lambda_2=-2$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$\begin{pmatrix}-4 & -2 & 0\\ -8 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，有基础解系$\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$

取$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，

习题5.2$(P_{175}-P_{178})$

在$a=0$时，将$\lambda_1=6$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，

得 $\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -8 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$，有基础解系$\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

将$\lambda_2=-2$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$\begin{pmatrix}-4 & -2 & 0\\ -8 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$，有基础解系$\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 0\end{pmatrix}$

取$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

8.解

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

8.解 (1)因为矩阵A有3个不同特征值，所以A相似于对角阵.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

8.解 (1)因为矩阵A有3个不同特征值，所以A相似于对角阵.

又因为它们相应的特征向量分别为 $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$,

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

8.解 (1)因为矩阵A有3个不同特征值，所以A相似于对角阵.

又因为它们相应的特征向量分别为 $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，所以取 $P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

8.解 (1)因为矩阵A有3个不同特征值，所以A相似于对角阵.

又因为它们相应的特征向量分别为 $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，所以取 $P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

8.解 (1)因为矩阵A有3个不同特征值，所以A相似于对角阵.

又因为它们相应的特征向量分别为 $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，所以取 $P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.即 $A=$

$$P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

8.解 (1)因为矩阵A有3个不同特征值，所以A相似于对角阵.

又因为它们相应的特征向量分别为 $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，所以取 $P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.即 $A=$

$$P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

8.解 (1)因为矩阵A有3个不同特征值，所以A相似于对角阵.

又因为它们相应的特征向量分别为 $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，所

以取 $P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.即 $A=$

$$P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

8.解 (1)因为矩阵A有3个不同特征值，所以A相似于对角阵.

又因为它们相应的特征向量分别为 $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，所

以取 $P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$， 则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.即 $A=$

$$P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3&-3\\-4&5&-3\\-4&4&-2\end{pmatrix}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

(2)因为矩阵A有3个线性无关的特征向量，所以A相似于对角阵.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

(2)因为矩阵A有3个线性无关的特征向量，所以A相似于对角阵. 又因为特征向量分别为 $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$,

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

(2)因为矩阵A有3个线性无关的特征向量，所以A相似于对角阵. 又因为特征向量分别为 $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，所以取

$$P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix},$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

(2)因为矩阵A有3个线性无关的特征向量，所以A相似于对角阵. 又因为特征向量分别为 $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，所以取

$$P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}，\text{则}P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

(2)因为矩阵A有3个线性无关的特征向量，所以A相似于对角阵. 又因为特征向量分别为 $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，所以取

$$P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}，\text{则}P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

即 $A=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}P^{-1}$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

(2)因为矩阵A有3个线性无关的特征向量，所以A相似于对角阵. 又因为特征向量分别为 $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，所以取

$$P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}，\quad \text{则}P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

即 $A=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}P^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}^{-1}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&\frac{3}{2}\\0&1&0\\\frac{3}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$A^{2013}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}^{2013}\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^{2013} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{2013} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2^{2013} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-2^{2012} & 0 & \frac{1}{2}+2^{2012} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}+2^{2012} & 0 & \frac{1}{2}-2^{2012} \end{pmatrix}$$

习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 2^{2012} & 0 & \frac{1}{2} + 2^{2012} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} + 2^{2012} & 0 & \frac{1}{2} - 2^{2012} \end{pmatrix}$$

(3)因为矩阵A的秩$r(A) = 2$，所以A有特征值$\lambda_1 = 0$，

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-2^{2012} & 0 & \frac{1}{2}+2^{2012} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}+2^{2012} & 0 & \frac{1}{2}-2^{2012} \end{pmatrix}$$

(3)因为矩阵A的秩$r(A)=2$，所以A有特征值$\lambda_1=0$，又因为 $A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-2^{2012} & 0 & \frac{1}{2}+2^{2012}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{2}+2^{2012} & 0 & \frac{1}{2}-2^{2012}\end{pmatrix}$$

(3)因为矩阵A的秩$r(A)=2$，所以A有特征值$\lambda_1=0$，又因为 $A\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，所以$A\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}=(-1)\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$，

$A\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，

习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 2^{2012} & 0 & \frac{1}{2} + 2^{2012} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} + 2^{2012} & 0 & \frac{1}{2} - 2^{2012} \end{pmatrix}$$

(3)因为矩阵A的秩$r(A) = 2$，所以A有特征值$\lambda_1 = 0$，又因为 $A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，所以$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，所以$A$有特征值$\lambda_2 = -1$，$\lambda_3 = 1$.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-2^{2012} & 0 & \frac{1}{2}+2^{2012}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{2}+2^{2012} & 0 & \frac{1}{2}-2^{2012}\end{pmatrix}$$

(3)因为矩阵A的秩$r(A)=2$，所以A有特征值$\lambda_1=0$，又因为 $A\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，所以$A\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}=(-1)\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$，

$A\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，所以$A$有特征值$\lambda_2=-1$，$\lambda_3=1$. 且属于特征值 $\lambda_2=-1$，$\lambda_3=1$的特征向量分别是 $\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

因为A是实对称矩阵，所以属于不同特征值的特征向量正交.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

因为A是实对称矩阵，所以属于不同特征值的特征向量正交.设矩阵A属于特征值$\lambda_1=0$的特征向量为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，

则$\begin{cases} x_1+0x_2-x_3=0 \\ x_1+0x_2+x_3=0 \end{cases}$，

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

因为A是实对称矩阵，所以属于不同特征值的特征向量正交.设矩阵A属于特征值$\lambda_1=0$的特征向量为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，

则$\begin{cases} x_1+0x_2-x_3=0 \\ x_1+0x_2+x_3=0 \end{cases}$，属于$\lambda_1=0$的特征向量$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

因为A是实对称矩阵，所以属于不同特征值的特征向量正交.设矩阵A属于特征值$\lambda_1=0$的特征向量为$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$，

则$\begin{cases} x_1+0x_2-x_3=0\\ x_1+0x_2+x_3=0\end{cases}$，属于$\lambda_1=0$的特征向量$\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$.

取$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

因为A是实对称矩阵，所以属于不同特征值的特征向量正交.设矩阵A属于特征值$\lambda_1=0$的特征向量为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，

则$\begin{cases} x_1+0x_2-x_3=0 \\ x_1+0x_2+x_3=0 \end{cases}$，属于$\lambda_1=0$的特征向量$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

取$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$A=$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

因为A是实对称矩阵，所以属于不同特征值的特征向量正交.设矩阵A属于特征值$\lambda_1=0$的特征向量为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，

则$\begin{cases} x_1+0x_2-x_3=0 \\ x_1+0x_2+x_3=0 \end{cases}$，属于$\lambda_1=0$的特征向量$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

取$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$A=$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

9.解

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

9.解 因为α_1,α_2线性无关，所以$2\alpha_1+\alpha_2\neq 0$.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

9.解 因为α_1,α_2线性无关，所以$2\alpha_1+\alpha_2\neq 0$.而$A\alpha_1=0$，所以 $A(2\alpha_1+\alpha_2)=$

习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

9.解 因为α_1, α_2线性无关，所以$2\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$.而$A\alpha_1 = 0$，所以 $A(2\alpha_1 + \alpha_2) = 2A\alpha_1 + A\alpha_2 =$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

9.解 因为α_1,α_2线性无关，所以$2\alpha_1+\alpha_2\neq 0$.而$A\alpha_1=0$，所以 $A(2\alpha_1+\alpha_2)=2A\alpha_1+A\alpha_2=0+(2\alpha_1+\alpha_2)=2\alpha_1+\alpha_2$，

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

9.解 因为α_1,α_2线性无关，所以$2\alpha_1+\alpha_2\neq 0$.而$A\alpha_1=0$，所以 $A(2\alpha_1+\alpha_2)=2A\alpha_1+A\alpha_2=0+(2\alpha_1+\alpha_2)=2\alpha_1+\alpha_2$，

所以A有非零特征值$\lambda_1=1$，且属于特征值$\lambda_1=1$特征向量为$2\alpha_1+\alpha_2$.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

9.解 因为α_1,α_2线性无关，所以$2\alpha_1+\alpha_2\neq 0$.而$A\alpha_1=0$，所以 $A(2\alpha_1+\alpha_2)=2A\alpha_1+A\alpha_2=0+(2\alpha_1+\alpha_2)=2\alpha_1+\alpha_2$，

所以A有非零特征值$\lambda_1=1$，且属于特征值$\lambda_1=1$特征向量为$2\alpha_1+\alpha_2$.

又因为A是2阶矩阵，且0是A的一个特征值，所以A的非零特征值为$\lambda_1=1$.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

9.解 因为α_1,α_2线性无关，所以$2\alpha_1+\alpha_2\neq 0$.而$A\alpha_1=0$，所以 $A(2\alpha_1+\alpha_2)=2A\alpha_1+A\alpha_2=0+(2\alpha_1+\alpha_2)=2\alpha_1+\alpha_2$，

所以A有非零特征值$\lambda_1=1$，且属于特征值$\lambda_1=1$特征向量为$2\alpha_1+\alpha_2$.

又因为A是2阶矩阵，且0是A的一个特征值，所以A的非零特征值为$\lambda_1=1$.

10.证明

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

9.解 因为α_1,α_2线性无关，所以$2\alpha_1+\alpha_2\neq 0$.而$A\alpha_1=0$，所以 $A(2\alpha_1+\alpha_2)=2A\alpha_1+A\alpha_2=0+(2\alpha_1+\alpha_2)=2\alpha_1+\alpha_2$，

所以A有非零特征值$\lambda_1=1$，且属于特征值$\lambda_1=1$特征向量为$2\alpha_1+\alpha_2$.

又因为A是2阶矩阵，且0是A的一个特征值，所以A的非零特征值为$\lambda_1=1$.

10.证明 设A,B是相似矩阵，则存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

9.解 因为α_1,α_2线性无关，所以$2\alpha_1+\alpha_2\neq 0$.而$A\alpha_1=0$，所以 $A(2\alpha_1+\alpha_2)=2A\alpha_1+A\alpha_2=0+(2\alpha_1+\alpha_2)=2\alpha_1+\alpha_2$，

所以A有非零特征值$\lambda_1=1$，且属于特征值$\lambda_1=1$特征向量为$2\alpha_1+\alpha_2$.

又因为A是2阶矩阵，且0是A的一个特征值，所以A的非零特征值为$\lambda_1=1$.

10.证明 设A,B是相似矩阵，则存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.又因为矩阵乘积的行列式等于它们行列式的积.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

9.解 因为α_1,α_2线性无关，所以$2\alpha_1+\alpha_2\neq 0$.而$A\alpha_1=0$，所以 $A(2\alpha_1+\alpha_2)=2A\alpha_1+A\alpha_2=0+(2\alpha_1+\alpha_2)=2\alpha_1+\alpha_2$，

所以A有非零特征值$\lambda_1=1$，且属于特征值$\lambda_1=1$特征向量为$2\alpha_1+\alpha_2$.

又因为A是2阶矩阵，且0是A的一个特征值，所以A的非零特征值为$\lambda_1=1$.

10.证明 设A,B是相似矩阵，则存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.又因为矩阵乘积的行列式等于它们行列式的积. 所以 $\det B=\det(P^{-1}AP)$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

9.解 因为α_1,α_2线性无关，所以$2\alpha_1+\alpha_2\neq 0$.而$A\alpha_1=0$，所以 $A(2\alpha_1+\alpha_2)=2A\alpha_1+A\alpha_2=0+(2\alpha_1+\alpha_2)=2\alpha_1+\alpha_2$，

所以A有非零特征值$\lambda_1=1$，且属于特征值$\lambda_1=1$特征向量为$2\alpha_1+\alpha_2$.

又因为A是2阶矩阵，且0是A的一个特征值，所以A的非零特征值为$\lambda_1=1$.

10.证明 设A,B是相似矩阵，则存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.又因为矩阵乘积的行列式等于它们行列式的积. 所以 $\det B=\det(P^{-1}AP)=(\det P^{-1})(\det A)(\det P)$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

9.解 因为α_1,α_2线性无关，所以$2\alpha_1+\alpha_2\neq 0$.而$A\alpha_1=0$，所以 $A(2\alpha_1+\alpha_2)=2A\alpha_1+A\alpha_2=0+(2\alpha_1+\alpha_2)=2\alpha_1+\alpha_2$，

所以A有非零特征值$\lambda_1=1$，且属于特征值$\lambda_1=1$特征向量为$2\alpha_1+\alpha_2$.

又因为A是2阶矩阵，且0是A的一个特征值，所以A的非零特征值为$\lambda_1=1$.

10.证明 设A,B是相似矩阵，则存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.又因为矩阵乘积的行列式等于它们行列式的积. 所以 $\det B=\det(P^{-1}AP)=(\det P^{-1})(\det A)(\det P)=(\det P^{-1})(\det P)(\det A)$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

9.解 因为α_1,α_2线性无关，所以$2\alpha_1+\alpha_2\neq 0$.而$A\alpha_1=0$，所以 $A(2\alpha_1+\alpha_2)=2A\alpha_1+A\alpha_2=0+(2\alpha_1+\alpha_2)=2\alpha_1+\alpha_2$，

所以A有非零特征值$\lambda_1=1$，且属于特征值$\lambda_1=1$特征向量为$2\alpha_1+\alpha_2$.

又因为A是2阶矩阵，且0是A的一个特征值，所以A的非零特征值为$\lambda_1=1$.

10.证明 设A,B是相似矩阵，则存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.又因为矩阵乘积的行列式等于它们行列式的积. 所以 $\det B=\det(P^{-1}AP)=(\det P^{-1})(\det A)(\det P)=(\det P^{-1})(\det P)(\det A)=(\det P^{-1}P)(\det A)$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

9.解 因为α_1,α_2线性无关，所以$2\alpha_1+\alpha_2\neq 0$.而$A\alpha_1=0$，所以 $A(2\alpha_1+\alpha_2)=2A\alpha_1+A\alpha_2=0+(2\alpha_1+\alpha_2)=2\alpha_1+\alpha_2$，

所以A有非零特征值$\lambda_1=1$，且属于特征值$\lambda_1=1$特征向量为$2\alpha_1+\alpha_2$.

又因为A是2阶矩阵，且0是A的一个特征值，所以A的非零特征值为$\lambda_1=1$.

10.证明 设A,B是相似矩阵，则存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.又因为矩阵乘积的行列式等于它们行列式的积. 所以 $\det B=\det(P^{-1}AP)=(\det P^{-1})(\det A)(\det P)=(\det P^{-1})(\det P)(\det A)=(\det P^{-1}P)(\det A)=(\det I)(\det A)$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

9.解 因为α_1,α_2线性无关，所以$2\alpha_1+\alpha_2\neq 0$.而$A\alpha_1=0$，所以 $A(2\alpha_1+\alpha_2)=2A\alpha_1+A\alpha_2=0+(2\alpha_1+\alpha_2)=2\alpha_1+\alpha_2$，

所以A有非零特征值$\lambda_1=1$，且属于特征值$\lambda_1=1$特征向量为$2\alpha_1+\alpha_2$.

又因为A是2阶矩阵，且0是A的一个特征值，所以A的非零特征值为$\lambda_1=1$.

10.证明 设A,B是相似矩阵，则存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.又因为矩阵乘积的行列式等于它们行列式的积. 所以 $\det B=\det(P^{-1}AP)=(\det P^{-1})(\det A)(\det P)=(\det P^{-1})(\det P)(\det A)=(\det P^{-1}P)(\det A)=(\det I)(\det A)=\det A$.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

9.解 因为α_1,α_2线性无关，所以$2\alpha_1+\alpha_2\neq 0$.而$A\alpha_1=0$，所以 $A(2\alpha_1+\alpha_2)=2A\alpha_1+A\alpha_2=0+(2\alpha_1+\alpha_2)=2\alpha_1+\alpha_2$，

所以A有非零特征值$\lambda_1=1$，且属于特征值$\lambda_1=1$特征向量为$2\alpha_1+\alpha_2$.

又因为A是2阶矩阵，且0是A的一个特征值，所以A的非零特征值为$\lambda_1=1$.

10.证明 设A,B是相似矩阵，则存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.又因为矩阵乘积的行列式等于它们行列式的积. 所以 $\det B=\det(P^{-1}AP)=(\det P^{-1})(\det A)(\det P)=(\det P^{-1})(\det P)(\det A)=(\det P^{-1}P)(\det A)=(\det I)(\det A)=\det A$.

所以相似矩阵有相同的行列式.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$\text{因为}\det\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

因为$\det\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，所以，矩阵$A$相似于对角元为$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$的对角阵，

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

因为$\det\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，所以，矩阵$A$相似于对角元为$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$的对角阵，则 $\det A=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

因为$\det\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，所以，矩阵

A相似于对角元为$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$的对角阵，则 $\det A=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

(1)因为A有3个不同特征值，所以A相似于对角阵，

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

因为$\det\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，所以，矩阵$A$相似于对角元为$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$的对角阵，则 $\det A=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

(1)因为A有3个不同特征值，所以A相似于对角阵，所以$\det A=\lambda\times 2\times 3=24$，

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

因为$\det\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，所以，矩阵$A$相似于对角元为$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$的对角阵，则 $\det A=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

(1)因为A有3个不同特征值，所以A相似于对角阵，所以$\det A=\lambda\times 2\times 3=24$，所以$\lambda=4$.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

因为$\det\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，所以，矩阵$A$相似于对角元为$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$的对角阵，则 $\det A=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

(1)因为A有3个不同特征值，所以A相似于对角阵，所以$\det A=\lambda\times 2\times 3=24$，所以$\lambda=4$.

(2)因为A的特征值互不相同，所以A相似于对角阵.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

因为$\det\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，所以，矩阵$A$相似于对角元为$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$的对角阵，则$\det A=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

(1)因为A有3个不同特征值，所以A相似于对角阵，所以$\det A=\lambda\times 2\times 3=24$，所以$\lambda=4$.

(2)因为A的特征值互不相同，所以A相似于对角阵.而A的行列式$|A|=0$，所以0是A的一个特征值，

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

因为$\det\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，所以，矩阵$A$相似于对角元为$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$的对角阵，则$\det A=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

(1)因为A有3个不同特征值，所以A相似于对角阵，所以$\det A=\lambda\times 2\times 3=24$，所以$\lambda=4$.

(2)因为A的特征值互不相同，所以A相似于对角阵.而A的行列式$|A|=0$，所以0是A的一个特征值，设A的两个非零特征值

分别为λ_1，λ_2，

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

因为det $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，所以，矩阵$A$相似于对角元为$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$的对角阵，则 $\det A = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

(1)因为A有3个不同特征值，所以A相似于对角阵，所以$\det A = \lambda \times 2 \times 3 = 24$，所以$\lambda = 4$.

(2)因为A的特征值互不相同，所以A相似于对角阵.而A的行列式$|A| = 0$，所以0是A的一个特征值，设A的两个非零特征值分别为λ_1，λ_2，则A相似于 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

因为$\det\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，所以，矩阵$A$相似于对角元为$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$的对角阵，则 $\det A=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

(1)因为A有3个不同特征值，所以A相似于对角阵，所以$\det A=\lambda\times 2\times 3=24$，所以$\lambda=4$.

(2)因为A的特征值互不相同，所以A相似于对角阵.而A的行列式$|A|=0$，所以0是A的一个特征值，设A的两个非零特征值分别为λ_1，λ_2，则A相似于$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，相似矩阵有相同的秩，所以$A$的秩$r(A)=2$.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

11.因为α_1，α_2是分别属于特征值λ_1，λ_2的特征向量，

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

11.因为α_1，α_2是分别属于特征值λ_1，λ_2的特征向量，所以$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$，$A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$，且$\alpha_1$，$\alpha_2$线性无关.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

11.因为α_1，α_2是分别属于特征值λ_1，λ_2的特征向量，所以$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$，$A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$，且$\alpha_1$，$\alpha_2$线性无关.

考虑组合$x_1\alpha_1+x_2A(\alpha_1+\alpha_2)=0$，

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

11.因为α_1，α_2是分别属于特征值λ_1，λ_2的特征向量，所以$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$，$A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$，且$\alpha_1$，$\alpha_2$线性无关.

考虑组合$x_1\alpha_1+x_2A(\alpha_1+\alpha_2)=0$，即

$x_1\alpha_1+x_2(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=0$，$(x_1+\lambda_1x_2)\alpha_1+\lambda_2x_2\alpha_2=0$.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

11.因为α_1，α_2是分别属于特征值λ_1，λ_2的特征向量，所以$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$，$A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$，且$\alpha_1$，$\alpha_2$线性无关.

考虑组合$x_1\alpha_1+x_2A(\alpha_1+\alpha_2)=0$，即
$x_1\alpha_1+x_2(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=0$，$(x_1+\lambda_1x_2)\alpha_1+\lambda_2x_2\alpha_2=0$.

因为α_1，α_2线性无关，所以$(*)\begin{cases} x_1+ & \lambda_1x_2=0 \\ & \lambda_2x_2=0 \end{cases}$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

11.因为α_1, α_2是分别属于特征值λ_1, λ_2的特征向量，所以 $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$, $A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$，且$\alpha_1$, α_2线性无关.

考虑组合$x_1\alpha_1+x_2A(\alpha_1+\alpha_2)=0$，即

$x_1\alpha_1+x_2(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=0$, $(x_1+\lambda_1x_2)\alpha_1+\lambda_2x_2\alpha_2=0$.

因为α_1, α_2线性无关，所以$(*)\begin{cases} x_1+ \quad \lambda_1x_2=0\\ \qquad\quad \lambda_2x_2=0\end{cases}$

若$\lambda_2\neq 0$，则$(*)$只有零解，

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

11.因为α_1，α_2是分别属于特征值λ_1，λ_2的特征向量，所以$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$，$A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$，且$\alpha_1$，$\alpha_2$线性无关.

考虑组合$x_1\alpha_1+x_2A(\alpha_1+\alpha_2)=0$，即$x_1\alpha_1+x_2(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=0$，$(x_1+\lambda_1x_2)\alpha_1+\lambda_2x_2\alpha_2=0$.

因为α_1，α_2线性无关，所以$(*)\begin{cases} x_1+ & \lambda_1x_2=0 \\ & \lambda_2x_2=0 \end{cases}$

若$\lambda_2\neq 0$，则$(*)$只有零解，这时，α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

11.因为α_1，α_2是分别属于特征值λ_1，λ_2的特征向量，所以$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$，$A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$，且$\alpha_1$，$\alpha_2$线性无关.

考虑组合$x_1\alpha_1+x_2A(\alpha_1+\alpha_2)=0$，即
$x_1\alpha_1+x_2(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=0$，$(x_1+\lambda_1x_2)\alpha_1+\lambda_2x_2\alpha_2=0$.

因为α_1，α_2线性无关，所以$(*)\begin{cases} x_1+\quad\lambda_1x_2=0 \\ \qquad\quad \lambda_2x_2=0 \end{cases}$

若$\lambda_2\neq0$，则$(*)$只有零解，这时，α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关.

若$\lambda_2=0$，则$(*)$有非零解，

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

11.因为α_1, α_2是分别属于特征值λ_1, λ_2的特征向量，所以$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$, $A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$，且$\alpha_1$, α_2线性无关.

考虑组合$x_1\alpha_1+x_2A(\alpha_1+\alpha_2)=0$，即
$x_1\alpha_1+x_2(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=0$, $(x_1+\lambda_1x_2)\alpha_1+\lambda_2x_2\alpha_2=0$.

因为α_1, α_2线性无关，所以$(*)\begin{cases} x_1+\lambda_1x_2=0 \\ \lambda_2x_2=0 \end{cases}$

若$\lambda_2\neq0$，则$(*)$只有零解，这时，α_1, $A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关.

若$\lambda_2=0$，则$(*)$有非零解，这时，α_1, $A(\alpha_1+\alpha_2)$线性相关.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

11.因为α_1, α_2是分别属于特征值λ_1, λ_2的特征向量，所以 $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$, $A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$，且$\alpha_1$, α_2线性无关.

考虑组合$x_1\alpha_1+x_2A(\alpha_1+\alpha_2)=0$，即 $x_1\alpha_1+x_2(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=0$, $(x_1+\lambda_1x_2)\alpha_1+\lambda_2x_2\alpha_2=0$.

因为α_1, α_2线性无关，所以$(*)\begin{cases} x_1+ \quad \lambda_1x_2=0\\ \qquad\quad \lambda_2x_2=0\end{cases}$

若$\lambda_2\neq0$，则$(*)$只有零解，这时，α_1, $A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关.

若$\lambda_2=0$，则$(*)$有非零解，这时，α_1, $A(\alpha_1+\alpha_2)$线性相关.

12.解

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

11.因为α_1，α_2是分别属于特征值λ_1，λ_2的特征向量，所以$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$，$A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$，且$\alpha_1$，$\alpha_2$线性无关.

考虑组合$x_1\alpha_1+x_2A(\alpha_1+\alpha_2)=0$，即
$x_1\alpha_1+x_2(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=0$，$(x_1+\lambda_1x_2)\alpha_1+\lambda_2x_2\alpha_2=0$.

因为α_1，α_2线性无关，所以$(*)\begin{cases} x_1+ & \lambda_1x_2=0 \\ & \lambda_2x_2=0 \end{cases}$

若$\lambda_2\neq0$，则$(*)$只有零解，这时，α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关.

若$\lambda_2=0$，则$(*)$有非零解，这时，α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$线性相关.

12.解 因为A与B相似，所以存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

11.因为α_1，α_2是分别属于特征值λ_1，λ_2的特征向量，所以 $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$，$A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$，且$\alpha_1$，$\alpha_2$线性无关.

考虑组合$x_1\alpha_1+x_2A(\alpha_1+\alpha_2)=0$，即 $x_1\alpha_1+x_2(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=0$，$(x_1+\lambda_1x_2)\alpha_1+\lambda_2x_2\alpha_2=0$.

因为α_1，α_2线性无关，所以$(*)\begin{cases} x_1+\quad \lambda_1x_2=0 \\ \qquad\quad \lambda_2x_2=0 \end{cases}$

若$\lambda_2\neq 0$，则$(*)$只有零解，这时，α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关.

若$\lambda_2=0$，则$(*)$有非零解，这时，α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$线性相关.

12.解 因为A与B相似，所以存在可逆矩阵P，使得 $P^{-1}AP=B$. 所以

$$P^{-1}(A-2I)P=$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

11.因为α_1，α_2是分别属于特征值λ_1，λ_2的特征向量，所以$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$，$A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$，且$\alpha_1$，$\alpha_2$线性无关.

考虑组合$x_1\alpha_1+x_2A(\alpha_1+\alpha_2)=0$，即
$x_1\alpha_1+x_2(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=0$, $(x_1+\lambda_1x_2)\alpha_1+\lambda_2x_2\alpha_2=0$.

因为α_1，α_2线性无关，所以$(*)\begin{cases} x_1+ \quad \lambda_1x_2=0 \\ \qquad\quad \lambda_2x_2=0 \end{cases}$

若$\lambda_2\neq 0$，则$(*)$只有零解，这时，α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关.

若$\lambda_2=0$，则$(*)$有非零解，这时，α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$线性相关.

12.解 因为A与B相似，所以存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$. 所以

$$P^{-1}(A-2I)P=P^{-1}AP-P^{-1}2IP$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

11.因为α_1，α_2是分别属于特征值λ_1，λ_2的特征向量，所以$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$，$A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$，且$\alpha_1$，$\alpha_2$线性无关.

考虑组合$x_1\alpha_1+x_2A(\alpha_1+\alpha_2)=0$，即
$x_1\alpha_1+x_2(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=0$，$(x_1+\lambda_1x_2)\alpha_1+\lambda_2x_2\alpha_2=0$.

因为α_1，α_2线性无关，所以$(*)\begin{cases} x_1+\quad\lambda_1x_2=0\\ \qquad\quad\lambda_2x_2=0\end{cases}$

若$\lambda_2\neq0$，则$(*)$只有零解，这时，α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关.

若$\lambda_2=0$，则$(*)$有非零解，这时，α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$线性相关.

12.解 因为A与B相似，所以存在可逆矩阵P，使得
$P^{-1}AP=B$. 所以

$$P^{-1}(A-2I)P=P^{-1}AP-P^{-1}2IP=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

习题5.2$(P_{175}-P_{178})$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix},$$

习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}，\text{而} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{的秩等于3，}$$

习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{而} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$的秩等于3，而相似矩阵有相同的秩，所以$A - 2I$的秩为3.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$$，而$\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$的秩等于3，而相似矩阵有相同的秩，所以$A-2I$的秩为3.

$$P^{-1}(A-2I)P=$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}，而\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$$的秩等于3，而相似矩阵有相同的秩，所以$A-2I$的秩为3.

$$P^{-1}(A-2I)P=P^{-1}AP-P^{-1}IP$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}，而\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$$的秩等于3，而相似矩阵有相同的秩，所以$A-2I$的秩为3.

$$P^{-1}(A-2I)P=P^{-1}AP-P^{-1}IP=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&-1&0\\1&0&-2\end{pmatrix}$$，而$\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&-1&0\\1&0&-2\end{pmatrix}$的秩等于3，而相似矩阵有相同的秩，所以$A-2I$的秩为3.

$$P^{-1}(A-2I)P=P^{-1}AP-P^{-1}IP=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix},$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$=\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&-1&0\\1&0&-2\end{pmatrix}$，而$\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&-1&0\\1&0&-2\end{pmatrix}$的秩等于3，而相似矩阵有相同的秩，所以$A-2I$的秩为3.

$$P^{-1}(A-2I)P=P^{-1}AP-P^{-1}IP=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$，而$\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$的秩等于1，

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&-1&0\\1&0&-2\end{pmatrix},\text{而}\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&-1&0\\1&0&-2\end{pmatrix}$$的秩等于3，而相似矩阵有相同的秩，所以$A-2I$的秩为3.

$$P^{-1}(A-2I)P=P^{-1}AP-P^{-1}IP=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix},\text{而}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$$的秩等于1，而相似矩阵有相同的秩，所以$A-I$的秩为1.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

13.

习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

13.(1)证明

习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

13.(1)证明 因为α_1, α_2是矩阵A分别属于特征值-1, 1的特征向量,

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

13.(1)证明 因为α_1，α_2是矩阵A分别属于特征值-1，1的特征向量，所以α_1，α_2线性无关且$A\alpha_1=-\alpha_1$，$A\alpha_2=\alpha_2$.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

13.(1)证明 因为α_1，α_2是矩阵A分别属于特征值-1，1的特征向量，所以α_1，α_2线性无关且$A\alpha_1=-\alpha_1$，$A\alpha_2=\alpha_2$.由

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0\Rightarrow A(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3)=0,$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

13.(1)证明 因为α_1，α_2是矩阵A分别属于特征值-1，1的特征向量，所以α_1，α_2线性无关且$A\alpha_1=-\alpha_1$，$A\alpha_2=\alpha_2$.由

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0\Rightarrow A(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3)=0,$$

即 $x_1A\alpha_1+x_2A\alpha_2+x_3A\alpha_3=-x_1\alpha_1+(x_2+x_3)\alpha_2+x_3\alpha_3=0$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

13.(1)证明 因为α_1，α_2是矩阵A分别属于特征值-1，1的特征向量，所以α_1，α_2线性无关且$A\alpha_1=-\alpha_1$，$A\alpha_2=\alpha_2$.由

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0\Rightarrow A(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3)=0,$$

即 $x_1A\alpha_1+x_2A\alpha_2+x_3A\alpha_3=-x_1\alpha_1+(x_2+x_3)\alpha_2+x_3\alpha_3=0$

比较可得 $2x_1\alpha_1+x_3\alpha_2=0$，

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

13.(1)证明 因为α_1，α_2是矩阵A分别属于特征值-1，1的特征向量，所以α_1，α_2线性无关且$A\alpha_1=-\alpha_1$，$A\alpha_2=\alpha_2$.由

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0\Rightarrow A(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3)=0,$$

即 $x_1A\alpha_1+x_2A\alpha_2+x_3A\alpha_3=-x_1\alpha_1+(x_2+x_3)\alpha_2+x_3\alpha_3=0$

比较可得 $2x_1\alpha_1+x_3\alpha_2=0$，再由$\alpha_1$，$\alpha_2$线性无关，

则$x_1=x_3=0$，

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

13.(1)证明 因为α_1, α_2是矩阵A分别属于特征值-1, 1的特征向量，所以α_1, α_2线性无关且$A\alpha_1=-\alpha_1$, $A\alpha_2=\alpha_2$.由

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0\Rightarrow A(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3)=0,$$

即 $x_1A\alpha_1+x_2A\alpha_2+x_3A\alpha_3=-x_1\alpha_1+(x_2+x_3)\alpha_2+x_3\alpha_3=0$

比较可得 $2x_1\alpha_1+x_3\alpha_2=0$，再由$\alpha_1$, α_2线性无关，则$x_1=x_3=0$，从而$x_2\alpha_2=0$, $x_2=0$.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

13.(1)证明 因为α_1, α_2是矩阵A分别属于特征值-1, 1的特征向量，所以α_1, α_2线性无关且$A\alpha_1=-\alpha_1$, $A\alpha_2=\alpha_2$.由

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0\Rightarrow A(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3)=0,$$

即 $x_1A\alpha_1+x_2A\alpha_2+x_3A\alpha_3=-x_1\alpha_1+(x_2+x_3)\alpha_2+x_3\alpha_3=0$

比较可得 $2x_1\alpha_1+x_3\alpha_2=0$，再由$\alpha_1$, α_2线性无关，则$x_1=x_3=0$，从而$x_2\alpha_2=0$, $x_2=0$.

所以α_1, α_2, α_3线性无关.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

13.(1)证明 因为α_1, α_2是矩阵A分别属于特征值-1, 1的特征向量，所以α_1, α_2线性无关且$A\alpha_1=-\alpha_1$, $A\alpha_2=\alpha_2$.由

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0\Rightarrow A(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3)=0,$$

即 $x_1A\alpha_1+x_2A\alpha_2+x_3A\alpha_3=-x_1\alpha_1+(x_2+x_3)\alpha_2+x_3\alpha_3=0$

比较可得 $2x_1\alpha_1+x_3\alpha_2=0$，再由$\alpha_1$, α_2线性无关，则$x_1=x_3=0$，从而$x_2\alpha_2=0$, $x_2=0$.

所以α_1, α_2, α_3线性无关.

(2)解 因为$AP=A(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

13.(1)证明 因为α_1，α_2是矩阵A分别属于特征值-1，1的特征向量，所以α_1，α_2线性无关且$A\alpha_1=-\alpha_1$，$A\alpha_2=\alpha_2$.由

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0 \Rightarrow A(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3)=0,$$

即 $x_1A\alpha_1+x_2A\alpha_2+x_3A\alpha_3=-x_1\alpha_1+(x_2+x_3)\alpha_2+x_3\alpha_3=0$

比较可得 $2x_1\alpha_1+x_3\alpha_2=0$，再由$\alpha_1$，$\alpha_2$线性无关，则$x_1=x_3=0$，从而$x_2\alpha_2=0$，$x_2=0$.

所以α_1，α_2，α_3线性无关.

(2)解 因为$AP=A(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)=(A\alpha_1\ \ A\alpha_2\ \ A\alpha_3)$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

13.(1)证明 因为α_1，α_2是矩阵A分别属于特征值-1，1的特征向量，所以α_1，α_2线性无关且$A\alpha_1=-\alpha_1$，$A\alpha_2=\alpha_2$.由

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0\Rightarrow A(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3)=0,$$

即 $x_1A\alpha_1+x_2A\alpha_2+x_3A\alpha_3=-x_1\alpha_1+(x_2+x_3)\alpha_2+x_3\alpha_3=0$

比较可得 $2x_1\alpha_1+x_3\alpha_2=0$，再由$\alpha_1$，$\alpha_2$线性无关，则$x_1=x_3=0$，从而$x_2\alpha_2=0$，$x_2=0$.

所以α_1，α_2，α_3线性无关.

(2)解 因为$AP=A(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)=(A\alpha_1\ \ A\alpha_2\ \ A\alpha_3)$

$$=(-\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_2+\alpha_3)$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

13.(1)证明 因为α_1, α_2是矩阵A分别属于特征值-1, 1的特征向量，所以α_1, α_2线性无关且$A\alpha_1=-\alpha_1$, $A\alpha_2=\alpha_2$.由

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0\Rightarrow A(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3)=0,$$

即 $x_1A\alpha_1+x_2A\alpha_2+x_3A\alpha_3=-x_1\alpha_1+(x_2+x_3)\alpha_2+x_3\alpha_3=0$

比较可得 $2x_1\alpha_1+x_3\alpha_2=0$，再由$\alpha_1$, α_2线性无关，则$x_1=x_3=0$，从而$x_2\alpha_2=0$, $x_2=0$.

所以α_1, α_2, α_3线性无关.

(2)解 因为$AP=A(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)=(A\alpha_1\ \ A\alpha_2\ \ A\alpha_3)$

$$=(-\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_2+\alpha_3)=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=P\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}，所以P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}, \text{所以} P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

14.解

习题5.2$(P_{175}-P_{178})$

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}，所以P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

14.解 因为α_1是矩阵A属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量，

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}，所以P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

14.解 因为α_1是矩阵A属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量，所以$A\alpha_1=\alpha_1$，$A^3\alpha_1$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}，所以P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

14.解 因为α_1是矩阵A属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量，所以 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A^3\alpha_1=A^2(A\alpha_1)$

习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}，所以P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14.解 因为α_1是矩阵A属于特征值$\lambda_1 = 1$的特征向量，所以 $A\alpha_1 = \alpha_1$, $A^3\alpha_1 = A^2(A\alpha_1) = A^2\alpha_1$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}，所以P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

14.解 因为α_1是矩阵A属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量，所以
$A\alpha_1=\alpha_1$，$A^3\alpha_1=A^2(A\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}，所以P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

14.解 因为α_1是矩阵A属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量，所以 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A^3\alpha_1=A^2(A\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$，$A^5\alpha_1$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}，所以P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

14.解 因为α_1是矩阵A属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量，所以 $A\alpha_1=\alpha_1$, $A^3\alpha_1=A^2(A\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$，$A^5\alpha_1=A^2(A^3\alpha_1)$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}，所以P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

14.解 因为α_1是矩阵A属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量，所以
$A\alpha_1=\alpha_1$, $A^3\alpha_1=A^2(A\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$，
$A^5\alpha_1=A^2(A^3\alpha_1)=A^2\alpha_1$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}，所以P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

14.解 因为α_1是矩阵A属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量，所以
$A\alpha_1=\alpha_1$, $A^3\alpha_1=A^2(A\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$，
$A^5\alpha_1=A^2(A^3\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}，所以P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

14.解 因为α_1是矩阵A属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量，所以
$A\alpha_1=\alpha_1$，$A^3\alpha_1=A^2(A\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$，
$A^5\alpha_1=A^2(A^3\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}, \text{所以} P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

14.解 因为α_1是矩阵A属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量，所以 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A^3\alpha_1=A^2(A\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$，$A^5\alpha_1=A^2(A^3\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$

(1)$B\alpha_1$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}，所以P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

14.解 因为α_1是矩阵A属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量，所以 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A^3\alpha_1=A^2(A\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$，$A^5\alpha_1=A^2(A^3\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$

(1)$B\alpha_1=(A^5-4A^3+I)\alpha_1$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}，所以P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

14.解 因为α_1是矩阵A属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量，所以

$A\alpha_1=\alpha_1$, $A^3\alpha_1=A^2(A\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$，

$A^5\alpha_1=A^2(A^3\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$

(1)$B\alpha_1=(A^5-4A^3+I)\alpha_1\ =A^5\alpha_1-4A^3\alpha_1+\alpha_1$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}，\text{所以}P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

14.解 因为α_1是矩阵A属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量，所以 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A^3\alpha_1=A^2(A\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$，$A^5\alpha_1=A^2(A^3\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$

(1)$B\alpha_1=(A^5-4A^3+I)\alpha_1=A^5\alpha_1-4A^3\alpha_1+\alpha_1=\alpha_1-4\alpha_1+\alpha_1$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}，所以P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

14.解 因为α_1是矩阵A属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量，所以 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A^3\alpha_1=A^2(A\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$，$A^5\alpha_1=A^2(A^3\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$

(1)$B\alpha_1=(A^5-4A^3+I)\alpha_1=A^5\alpha_1-4A^3\alpha_1+\alpha_1=\alpha_1-4\alpha_1+\alpha_1=-2\alpha_1$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}，所以P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

14.解 因为α_1是矩阵A属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量，所以 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A^3\alpha_1=A^2(A\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$，$A^5\alpha_1=A^2(A^3\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$

(1)$B\alpha_1=(A^5-4A^3+I)\alpha_1=A^5\alpha_1-4A^3\alpha_1+\alpha_1=\alpha_1-4\alpha_1+\alpha_1=-2\alpha_1$

所以α_1是矩阵B属于特征值$\gamma_1=-2$的特征向量.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}，所以P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

14.解 因为α_1是矩阵A属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量，所以 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A^3\alpha_1=A^2(A\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$，$A^5\alpha_1=A^2(A^3\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$

(1)$B\alpha_1=(A^5-4A^3+I)\alpha_1=A^5\alpha_1-4A^3\alpha_1+\alpha_1=\alpha_1-4\alpha_1+\alpha_1=-2\alpha_1$

所以α_1是矩阵B属于特征值$\gamma_1=-2$的特征向量.

(2)设α_2，α_3是矩阵A分别属于特征值$\lambda_2=2$，$\lambda_3=-2$的特征向量，

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}，所以P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

14.解 因为α_1是矩阵A属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量，所以 $A\alpha_1=\alpha_1$, $A^3\alpha_1=A^2(A\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$, $A^5\alpha_1=A^2(A^3\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$

(1)$B\alpha_1=(A^5-4A^3+I)\alpha_1=A^5\alpha_1-4A^3\alpha_1+\alpha_1=\alpha_1-4\alpha_1+\alpha_1=-2\alpha_1$

所以α_1是矩阵B属于特征值$\gamma_1=-2$的特征向量.

(2)设α_2, α_3是矩阵A分别属于特征值$\lambda_2=2$, $\lambda_3=-2$的特征向量，即 $A\alpha_2=2\alpha_2$, $A\alpha_3=-2\alpha_3$.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}，所以P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

14.解 因为α_1是矩阵A属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量，所以
$A\alpha_1=\alpha_1$，$A^3\alpha_1=A^2(A\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$，
$A^5\alpha_1=A^2(A^3\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$

(1)$B\alpha_1=(A^5-4A^3+I)\alpha_1=A^5\alpha_1-4A^3\alpha_1+\alpha_1=$
$\alpha_1-4\alpha_1+\alpha_1=-2\alpha_1$

所以α_1是矩阵B属于特征值$\gamma_1=-2$的特征向量.

(2)设α_2，α_3是矩阵A分别属于特征值$\lambda_2=2$，$\lambda_3=-2$的特征向量，即 $A\alpha_2=2\alpha_2$，$A\alpha_3=-2\alpha_3$. 则$A^3\alpha_2$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}，所以P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

14.解 因为α_1是矩阵A属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量，所以 $A\alpha_1=\alpha_1$, $A^3\alpha_1=A^2(A\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$，$A^5\alpha_1=A^2(A^3\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$

(1)$B\alpha_1=(A^5-4A^3+I)\alpha_1=A^5\alpha_1-4A^3\alpha_1+\alpha_1=\alpha_1-4\alpha_1+\alpha_1=-2\alpha_1$

所以α_1是矩阵B属于特征值$\gamma_1=-2$的特征向量.

(2)设α_2, α_3是矩阵A分别属于特征值$\lambda_2=2$, $\lambda_3=-2$的特征向量，即 $A\alpha_2=2\alpha_2$, $A\alpha_3=-2\alpha_3$. 则$A^3\alpha_2=A^2(A\alpha_2)$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}，所以P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

14.解 因为α_1是矩阵A属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量，所以 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A^3\alpha_1=A^2(A\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$，$A^5\alpha_1=A^2(A^3\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$

(1)$B\alpha_1=(A^5-4A^3+I)\alpha_1=A^5\alpha_1-4A^3\alpha_1+\alpha_1=\alpha_1-4\alpha_1+\alpha_1=-2\alpha_1$

所以α_1是矩阵B属于特征值$\gamma_1=-2$的特征向量.

(2)设α_2，α_3是矩阵A分别属于特征值$\lambda_2=2$，$\lambda_3=-2$的特征向量，即 $A\alpha_2=2\alpha_2$，$A\alpha_3=-2\alpha_3$. 则$A^3\alpha_2=A^2(A\alpha_2)=A^2(2\alpha_2)$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}，所以P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

14.解 因为α_1是矩阵A属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量，所以 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A^3\alpha_1=A^2(A\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$，$A^5\alpha_1=A^2(A^3\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$

(1)$B\alpha_1=(A^5-4A^3+I)\alpha_1=A^5\alpha_1-4A^3\alpha_1+\alpha_1=\alpha_1-4\alpha_1+\alpha_1=-2\alpha_1$

所以α_1是矩阵B属于特征值$\gamma_1=-2$的特征向量.

(2)设α_2，α_3是矩阵A分别属于特征值$\lambda_2=2$，$\lambda_3=-2$的特征向量，即 $A\alpha_2=2\alpha_2$，$A\alpha_3=-2\alpha_3$. 则$A^3\alpha_2=A^2(A\alpha_2)=A^2(2\alpha_2)=2A(A\alpha_2)$

习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

$$= P\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}，所以 P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14.解 因为α_1是矩阵A属于特征值$\lambda_1 = 1$的特征向量，所以 $A\alpha_1 = \alpha_1$，$A^3\alpha_1 = A^2(A\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1$，$A^5\alpha_1 = A^2(A^3\alpha_1) = A^2\alpha_1 = A(A\alpha_1) = A\alpha_1 = \alpha_1$

(1)$B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + I)\alpha_1 = A^5\alpha_1 - 4A^3\alpha_1 + \alpha_1 = \alpha_1 - 4\alpha_1 + \alpha_1 = -2\alpha_1$

所以α_1是矩阵B属于特征值$\gamma_1 = -2$的特征向量.

(2)设α_2，α_3是矩阵A分别属于特征值$\lambda_2 = 2$，$\lambda_3 = -2$的特征向量，即 $A\alpha_2 = 2\alpha_2$，$A\alpha_3 = -2\alpha_3$. 则$A^3\alpha_2 = A^2(A\alpha_2) = A^2(2\alpha_2) = 2A(A\alpha_2) = 2A(2\alpha_2)$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\text{，所以}P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

14.解 因为α_1是矩阵A属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量，所以 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A^3\alpha_1=A^2(A\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$，$A^5\alpha_1=A^2(A^3\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$

(1)$B\alpha_1=(A^5-4A^3+I)\alpha_1=A^5\alpha_1-4A^3\alpha_1+\alpha_1=\alpha_1-4\alpha_1+\alpha_1=-2\alpha_1$

所以α_1是矩阵B属于特征值$\gamma_1=-2$的特征向量.

(2)设α_2，α_3是矩阵A分别属于特征值$\lambda_2=2$，$\lambda_3=-2$的特征向量，即 $A\alpha_2=2\alpha_2$，$A\alpha_3=-2\alpha_3$. 则$A^3\alpha_2=A^2(A\alpha_2)=A^2(2\alpha_2)=2A(A\alpha_2)=2A(2\alpha_2)=2^2A\alpha_2$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}, \text{所以} P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

14.解 因为α_1是矩阵A属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量，所以 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A^3\alpha_1=A^2(A\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$，$A^5\alpha_1=A^2(A^3\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$

(1)$B\alpha_1=(A^5-4A^3+I)\alpha_1=A^5\alpha_1-4A^3\alpha_1+\alpha_1=\alpha_1-4\alpha_1+\alpha_1=-2\alpha_1$

所以α_1是矩阵B属于特征值$\gamma_1=-2$的特征向量.

(2)设α_2，α_3是矩阵A分别属于特征值$\lambda_2=2$，$\lambda_3=-2$的特征向量，即 $A\alpha_2=2\alpha_2$，$A\alpha_3=-2\alpha_3$. 则$A^3\alpha_2=A^2(A\alpha_2)=A^2(2\alpha_2)=2A(A\alpha_2)=2A(2\alpha_2)=2^2A\alpha_2=2^3\alpha_2$.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}，所以P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

14.解 因为α_1是矩阵A属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量，所以 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A^3\alpha_1=A^2(A\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$，$A^5\alpha_1=A^2(A^3\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$

(1)$B\alpha_1=(A^5-4A^3+I)\alpha_1=A^5\alpha_1-4A^3\alpha_1+\alpha_1=\alpha_1-4\alpha_1+\alpha_1=-2\alpha_1$

所以α_1是矩阵B属于特征值$\gamma_1=-2$的特征向量.

(2)设α_2，α_3是矩阵A分别属于特征值$\lambda_2=2$，$\lambda_3=-2$的特征向量，即 $A\alpha_2=2\alpha_2$，$A\alpha_3=-2\alpha_3$. 则$A^3\alpha_2=A^2(A\alpha_2)=A^2(2\alpha_2)=2A(A\alpha_2)=2A(2\alpha_2)=2^2A\alpha_2=2^3\alpha_2$.

$A^5\alpha_2$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}，所以P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

14.解 因为α_1是矩阵A属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量，所以 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A^3\alpha_1=A^2(A\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$，$A^5\alpha_1=A^2(A^3\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$

(1)$B\alpha_1=(A^5-4A^3+I)\alpha_1=A^5\alpha_1-4A^3\alpha_1+\alpha_1=\alpha_1-4\alpha_1+\alpha_1=-2\alpha_1$

所以α_1是矩阵B属于特征值$\gamma_1=-2$的特征向量.

(2)设α_2，α_3是矩阵A分别属于特征值$\lambda_2=2$，$\lambda_3=-2$的特征向量，即 $A\alpha_2=2\alpha_2$，$A\alpha_3=-2\alpha_3$. 则$A^3\alpha_2=A^2(A\alpha_2)=A^2(2\alpha_2)=2A(A\alpha_2)=2A(2\alpha_2)=2^2A\alpha_2=2^3\alpha_2$.

$A^5\alpha_2=A^2(A^3\alpha_2)$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}，所以P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

14.解 因为α_1是矩阵A属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量，所以 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A^3\alpha_1=A^2(A\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$， $A^5\alpha_1=A^2(A^3\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$

(1)$B\alpha_1=(A^5-4A^3+I)\alpha_1=A^5\alpha_1-4A^3\alpha_1+\alpha_1=\alpha_1-4\alpha_1+\alpha_1=-2\alpha_1$

所以α_1是矩阵B属于特征值$\gamma_1=-2$的特征向量.

(2)设α_2，α_3是矩阵A分别属于特征值$\lambda_2=2$，$\lambda_3=-2$的特征向量，即 $A\alpha_2=2\alpha_2$，$A\alpha_3=-2\alpha_3$. 则$A^3\alpha_2=A^2(A\alpha_2)=A^2(2\alpha_2)=2A(A\alpha_2)=2A(2\alpha_2)=2^2A\alpha_2=2^3\alpha_2$.
$A^5\alpha_2=A^2(A^3\alpha_2)=A^2(2^3\alpha_2)$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}，所以P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

14.解 因为α_1是矩阵A属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量，所以 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A^3\alpha_1=A^2(A\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$，$A^5\alpha_1=A^2(A^3\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$

(1)$B\alpha_1=(A^5-4A^3+I)\alpha_1=A^5\alpha_1-4A^3\alpha_1+\alpha_1=\alpha_1-4\alpha_1+\alpha_1=-2\alpha_1$

所以α_1是矩阵B属于特征值$\gamma_1=-2$的特征向量.

(2)设α_2，α_3是矩阵A分别属于特征值$\lambda_2=2$，$\lambda_3=-2$的特征向量，即 $A\alpha_2=2\alpha_2$，$A\alpha_3=-2\alpha_3$. 则$A^3\alpha_2=A^2(A\alpha_2)=A^2(2\alpha_2)=2A(A\alpha_2)=2A(2\alpha_2)=2^2A\alpha_2=2^3\alpha_2$.
$A^5\alpha_2=A^2(A^3\alpha_2)=A^2(2^3\alpha_2)=2^3A(A\alpha_2)$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}，所以P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

14.解 因为α_1是矩阵A属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量，所以 $A\alpha_1=\alpha_1$, $A^3\alpha_1=A^2(A\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$, $A^5\alpha_1=A^2(A^3\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$

(1)$B\alpha_1=(A^5-4A^3+I)\alpha_1=A^5\alpha_1-4A^3\alpha_1+\alpha_1=\alpha_1-4\alpha_1+\alpha_1=-2\alpha_1$

所以α_1是矩阵B属于特征值$\gamma_1=-2$的特征向量.

(2)设α_2, α_3是矩阵A分别属于特征值$\lambda_2=2$, $\lambda_3=-2$的特征向量，即 $A\alpha_2=2\alpha_2$, $A\alpha_3=-2\alpha_3$. 则$A^3\alpha_2=A^2(A\alpha_2)=A^2(2\alpha_2)=2A(A\alpha_2)=2A(2\alpha_2)=2^2A\alpha_2=2^3\alpha_2$.

$A^5\alpha_2=A^2(A^3\alpha_2)=A^2(2^3\alpha_2)=2^3A(A\alpha_2)=2^3A(2\alpha_2)$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}，所以P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

14.解 因为α_1是矩阵A属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量，所以 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A^3\alpha_1=A^2(A\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$，$A^5\alpha_1=A^2(A^3\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$

(1)$B\alpha_1=(A^5-4A^3+I)\alpha_1=A^5\alpha_1-4A^3\alpha_1+\alpha_1=\alpha_1-4\alpha_1+\alpha_1=-2\alpha_1$

所以α_1是矩阵B属于特征值$\gamma_1=-2$的特征向量.

(2)设α_2，α_3是矩阵A分别属于特征值$\lambda_2=2$，$\lambda_3=-2$的特征向量，即 $A\alpha_2=2\alpha_2$，$A\alpha_3=-2\alpha_3$. 则$A^3\alpha_2=A^2(A\alpha_2)=A^2(2\alpha_2)=2A(A\alpha_2)=2A(2\alpha_2)=2^2A\alpha_2=2^3\alpha_2$.
$A^5\alpha_2=A^2(A^3\alpha_2)=A^2(2^3\alpha_2)=2^3A(A\alpha_2)=2^3A(2\alpha_2)=2^4A\alpha_2$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}，所以P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

14.解 因为α_1是矩阵A属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量，所以 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A^3\alpha_1=A^2(A\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$， $A^5\alpha_1=A^2(A^3\alpha_1)=A^2\alpha_1=A(A\alpha_1)=A\alpha_1=\alpha_1$

(1)$B\alpha_1=(A^5-4A^3+I)\alpha_1=A^5\alpha_1-4A^3\alpha_1+\alpha_1=\alpha_1-4\alpha_1+\alpha_1=-2\alpha_1$

所以α_1是矩阵B属于特征值$\gamma_1=-2$的特征向量.

(2)设α_2，α_3是矩阵A分别属于特征值$\lambda_2=2$，$\lambda_3=-2$的特征向量，即 $A\alpha_2=2\alpha_2$，$A\alpha_3=-2\alpha_3$. 则$A^3\alpha_2=A^2(A\alpha_2)=A^2(2\alpha_2)=2A(A\alpha_2)=2A(2\alpha_2)=2^2A\alpha_2=2^3\alpha_2$.

$A^5\alpha_2=A^2(A^3\alpha_2)=A^2(2^3\alpha_2)=2^3A(A\alpha_2)=2^3A(2\alpha_2)=2^4A\alpha_2=2^5\alpha_2$.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

同上可以得到$A^3\alpha_3=(-2)^3\alpha_3$, $A^5\alpha_3=(-2)^5\alpha_3$.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

同上可以得到$A^3\alpha_3=(-2)^3\alpha_3$, $A^5\alpha_3=(-2)^5\alpha_3$. 所以

$$B\alpha_2=(A^5-4A^3+I)\alpha_2=(2^5-4\times 2^3+1)\alpha_2=\alpha_2,$$

$$B\alpha_3=(A^5-4A^3+I)\alpha_3=((-2)^5-4\times(-2)^3+1)\alpha_3=\alpha_3$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

同上可以得到$A^3\alpha_3=(-2)^3\alpha_3$，$A^5\alpha_3=(-2)^5\alpha_3$. 所以

$$B\alpha_2=(A^5-4A^3+I)\alpha_2=(2^5-4\times 2^3+1)\alpha_2=\alpha_2,$$

$$B\alpha_3=(A^5-4A^3+I)\alpha_3=((-2)^5-4\times(-2)^3+1)\alpha_3=\alpha_3$$

即，α_2，α_3是矩阵B属于特征值$\gamma_2=1$的特征向量.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

同上可以得到$A^3\alpha_3=(-2)^3\alpha_3$，$A^5\alpha_3=(-2)^5\alpha_3$. 所以

$$B\alpha_2=(A^5-4A^3+I)\alpha_2=(2^5-4\times 2^3+1)\alpha_2=\alpha_2,$$

$$B\alpha_3=(A^5-4A^3+I)\alpha_3=((-2)^5-4\times(-2)^3+1)\alpha_3=\alpha_3$$

即，α_2，α_3是矩阵B属于特征值$\gamma_2=1$的特征向量.

又因为A是实对称矩阵，所以矩阵A属于不同特征值的特征

向量正交，

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

同上可以得到$A^3\alpha_3=(-2)^3\alpha_3$, $A^5\alpha_3=(-2)^5\alpha_3$. 所以

$$B\alpha_2=(A^5-4A^3+I)\alpha_2=(2^5-4\times 2^3+1)\alpha_2=\alpha_2,$$

$$B\alpha_3=(A^5-4A^3+I)\alpha_3=((-2)^5-4\times(-2)^3+1)\alpha_3=\alpha_3$$

即，α_2, α_3是矩阵B属于特征值$\gamma_2=1$的特征向量.

又因为A是实对称矩阵，所以矩阵A属于不同特征值的特征向量正交，记$\alpha_2=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$,

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

同上可以得到$A^3\alpha_3=(-2)^3\alpha_3$，$A^5\alpha_3=(-2)^5\alpha_3$. 所以
$B\alpha_2=(A^5-4A^3+I)\alpha_2=(2^5-4\times 2^3+1)\alpha_2=\alpha_2$,
$B\alpha_3=(A^5-4A^3+I)\alpha_3=((-2)^5-4\times(-2)^3+1)\alpha_3=\alpha_3$
即，α_2，α_3是矩阵B属于特征值$\gamma_2=1$的特征向量.

又因为A是实对称矩阵，所以矩阵A属于不同特征值的特征向量正交，记$\alpha_2=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，则

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\y_1-y_2+y_3=0\\x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=0\end{cases}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

同上可以得到$A^3\alpha_3=(-2)^3\alpha_3$，$A^5\alpha_3=(-2)^5\alpha_3$. 所以

$B\alpha_2=(A^5-4A^3+I)\alpha_2=(2^5-4\times 2^3+1)\alpha_2=\alpha_2$,

$B\alpha_3=(A^5-4A^3+I)\alpha_3=((-2)^5-4\times(-2)^3+1)\alpha_3=\alpha_3$

即，α_2，α_3是矩阵B属于特征值$\gamma_2=1$的特征向量.

又因为A是实对称矩阵，所以矩阵A属于不同特征值的特征向量正交，记$\alpha_2=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，则

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\y_1-y_2+y_3=0\\x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=0\end{cases}$$ 可得$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$\text{取}P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&1&-1\end{pmatrix},$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

$$取P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&1&-1\end{pmatrix}，则P^{-1}BP=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}，$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

取$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$，则$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，所以

$$B=P\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

取$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$，则$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，所以

$$B=P\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

取$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$，则$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，所以

$$B=P\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

15.解

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

15.解 因为α是矩阵A的伴随矩阵A^*属于特征值λ的特征向量,

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

15.解 因为α是矩阵A的伴随矩阵A^*属于特征值λ的特征向量，所以$A^*\alpha=\lambda\alpha$.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

15.解 因为α是矩阵A的伴随矩阵A^*属于特征值λ的特征向量，所以$A^*\alpha=\lambda\alpha$. 而$AA^*=|A|I$，所以
$AA^*\alpha=A(\lambda\alpha)$, $|A|\alpha=\lambda(A\alpha)$.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

15.解 因为α是矩阵A的伴随矩阵A^*属于特征值λ的特征向量，所以$A^*\alpha=\lambda\alpha$. 而$AA^*=|A|I$，所以
$AA^*\alpha=A(\lambda\alpha)$, $|A|\alpha=\lambda(A\alpha)$. 又$|A|=3a-2$,

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

15.解 因为α是矩阵A的伴随矩阵A^*属于特征值λ的特征向量，所以$A^*\alpha=\lambda\alpha$. 而$AA^*=|A|I$，所以
$AA^*\alpha=A(\lambda\alpha)$, $|A|\alpha=\lambda(A\alpha)$. 又$|A|=3a-2$,

$$|A|\alpha=\begin{pmatrix}3a-2\\(3a-2)b\\3a-2\end{pmatrix}, \quad A\alpha=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

15.解 因为α是矩阵A的伴随矩阵A^*属于特征值λ的特征向量，所以$A^*\alpha=\lambda\alpha$. 而$AA^*=|A|I$，所以
$AA^*\alpha=A(\lambda\alpha)$, $|A|\alpha=\lambda(A\alpha)$. 又$|A|=3a-2$,

$$|A|\alpha=\begin{pmatrix}3a-2\\(3a-2)b\\3a-2\end{pmatrix},\ A\alpha=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b+3\\2b+2\\a+b+1\end{pmatrix},$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

15.解 因为α是矩阵A的伴随矩阵A^*属于特征值λ的特征向量，所以$A^*\alpha=\lambda\alpha$. 而$AA^*=|A|I$，所以
$AA^*\alpha=A(\lambda\alpha)$, $|A|\alpha=\lambda(A\alpha)$. 又$|A|=3a-2$,

$$|A|\alpha=\begin{pmatrix}3a-2\\(3a-2)b\\3a-2\end{pmatrix},\quad A\alpha=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b+3\\2b+2\\a+b+1\end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix}3a-2\\(3a-2)b\\3a-2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}b+3\\2b+2\\a+b+1\end{pmatrix},$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

15.解 因为α是矩阵A的伴随矩阵A^*属于特征值λ的特征向量，所以$A^*\alpha=\lambda\alpha$. 而$AA^*=|A|I$，所以

$AA^*\alpha=A(\lambda\alpha)$, $|A|\alpha=\lambda(A\alpha)$. 又$|A|=3a-2$,

$$|A|\alpha=\begin{pmatrix}3a-2\\(3a-2)b\\3a-2\end{pmatrix},\ A\alpha=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b+3\\2b+2\\a+b+1\end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix}3a-2\\(3a-2)b\\3a-2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}b+3\\2b+2\\a+b+1\end{pmatrix},\ \begin{cases}3a-2&=\lambda(b+3)\\(3a-2)b&=\lambda(2b+2)\\3a-2&=\lambda(a+b+1)\end{cases}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

15.解 因为α是矩阵A的伴随矩阵A^*属于特征值λ的特征向量，所以$A^*\alpha=\lambda\alpha$. 而$AA^*=|A|I$，所以

$AA^*\alpha=A(\lambda\alpha)$, $|A|\alpha=\lambda(A\alpha)$. 又$|A|=3a-2$,

$$|A|\alpha=\begin{pmatrix}3a-2\\(3a-2)b\\3a-2\end{pmatrix},\quad A\alpha=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b+3\\2b+2\\a+b+1\end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix}3a-2\\(3a-2)b\\3a-2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}b+3\\2b+2\\a+b+1\end{pmatrix},\quad \begin{cases}3a-2&=\lambda(b+3)\\(3a-2)b&=\lambda(2b+2)\\3a-2&=\lambda(a+b+1)\end{cases}$$

又因为A可逆，所以$\lambda\neq 0$.

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

15.解 因为α是矩阵A的伴随矩阵A^*属于特征值λ的特征向量，所以$A^*\alpha=\lambda\alpha$. 而$AA^*=|A|I$，所以
$AA^*\alpha=A(\lambda\alpha)$, $|A|\alpha=\lambda(A\alpha)$. 又$|A|=3a-2$,

$$|A|\alpha=\begin{pmatrix}3a-2\\(3a-2)b\\3a-2\end{pmatrix},\quad A\alpha=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b+3\\2b+2\\a+b+1\end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix}3a-2\\(3a-2)b\\3a-2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}b+3\\2b+2\\a+b+1\end{pmatrix},\quad \begin{cases}3a-2&=\lambda(b+3)\\(3a-2)b&=\lambda(2b+2)\\3a-2&=\lambda(a+b+1)\end{cases}$$

又因为A可逆，所以$\lambda\neq0$. 解得$\begin{cases}a=2\\b=1\\\lambda=1\end{cases}$ 或者$\begin{cases}a=2\\b=-2\\\lambda=4\end{cases}$

习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

16.解

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

16.解 (1)因为

$$AP = A\begin{pmatrix} X & AX & A^2X \end{pmatrix}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

16.解 (1)因为

$$AP = A\begin{pmatrix} X & AX & A^2X \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} AX & A^2X & A^3X \end{pmatrix}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

16.解 (1)因为

$$AP = A\begin{pmatrix} X & AX & A^2X \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} AX & A^2X & A^3X \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} AX & A^2X & 3AX-2A^2X \end{pmatrix}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

16.解 (1)因为

$$AP = A\begin{pmatrix} X & AX & A^2X \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} AX & A^2X & A^3X \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} AX & A^2X & 3AX-2A^2X \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} X & AX & A^2X \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

习题5.2($P_{175} - P_{178}$)

16.解 (1)因为

$$AP = A\begin{pmatrix} X & AX & A^2X \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} AX & A^2X & A^3X \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} AX & A^2X & 3AX - 2A^2X \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} X & AX & A^2X \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

16.解 (1)因为

$$AP=A\begin{pmatrix}X & AX & A^2X\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}AX & A^2X & A^3X\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}AX & A^2X & 3AX-2A^2X\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}X & AX & A^2X\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

又因为X，AX，A^2X线性无关，所以P是可逆矩阵，

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

16.解 (1)因为

$$AP = A\begin{pmatrix} X & AX & A^2X \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} AX & A^2X & A^3X \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} AX & A^2X & 3AX-2A^2X \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} X & AX & A^2X \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

又因为X, AX, A^2X线性无关，所以P是可逆矩阵，所以

$$A = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}P^{-1},$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

16.解 (1)因为

$$AP = A\begin{pmatrix} X & AX & A^2X \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} AX & A^2X & A^3X \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} AX & A^2X & 3AX-2A^2X \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} X & AX & A^2X \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

又因为X, AX, A^2X线性无关，所以P是可逆矩阵，所以

$$A = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}P^{-1},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

(2)因为$A=PBP^{-1}$,

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

(2)因为$A=PBP^{-1}$，所以

$$\det(A+I)=\det(PBP^{-1}+PP^{-1})$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

(2)因为$A=PBP^{-1}$，所以

$$\det(A+I)=\det(PBP^{-1}+PP^{-1})=\det[P(B+I)P^{-1}]$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

(2)因为$A=PBP^{-1}$，所以

$$\det(A+I)=\det(PBP^{-1}+PP^{-1})=\det[P(B+I)P^{-1}]$$
$$=\det P\det(B+I)\det P^{-1}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

(2)因为$A=PBP^{-1}$，所以

$$\det(A+I)=\det(PBP^{-1}+PP^{-1})=\det[P(B+I)P^{-1}]$$
$$=\det P\det(B+I)\det P^{-1}=\det(B+I)$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

(2)因为$A=PBP^{-1}$，所以

$$\det(A+I)=\det(PBP^{-1}+PP^{-1})=\det[P(B+I)P^{-1}]$$
$$=\det P\det(B+I)\det P^{-1}=\det(B+I)$$
$$=\det[\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}]$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

(2)因为$A=PBP^{-1}$，所以

$$\det(A+I)=\det(PBP^{-1}+PP^{-1})=\det[P(B+I)P^{-1}]$$
$$=\det P\det(B+I)\det P^{-1}=\det(B+I)$$
$$=\det[\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}]=\det\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&3\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

习题5.2($P_{175}-P_{178}$)

(2)因为$A=PBP^{-1}$，所以

$$\det(A+I)=\det(PBP^{-1}+PP^{-1})=\det[P(B+I)P^{-1}]$$
$$=\det P\det(B+I)\det P^{-1}=\det(B+I)$$
$$=\det[\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}]=\det\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&3\\0&1&-1\end{pmatrix}=-4.$$

习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

1.解

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

1.解 (1) 矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

1.解 (1) 矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ -1 & \lambda & -1\\ 0 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+\sqrt{2})(\lambda-\sqrt{2}).$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

1.解 (1) 矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+\sqrt{2})(\lambda-\sqrt{2}).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = \sqrt{2}.$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

1.解 (1) 矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ -1 & \lambda & -1\\ 0 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+\sqrt{2})(\lambda-\sqrt{2}).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=-\sqrt{2},\ \lambda_3=\sqrt{2}.$

将$\lambda_1=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

1.解 (1) 矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ -1 & \lambda & -1\\ 0 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+\sqrt{2})(\lambda-\sqrt{2}).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=-\sqrt{2},\ \lambda_3=\sqrt{2}.$

将$\lambda_1=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

1.解 (1) 矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ -1 & \lambda & -1\\ 0 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+\sqrt{2})(\lambda-\sqrt{2}).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=-\sqrt{2},\ \lambda_3=\sqrt{2}.$

将$\lambda_1=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_1=0$的全部特征向量为

$$\left\{k\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\ \middle|\ k\text{是任意不为0的数}\right\}$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

将$\lambda_2=-\sqrt{2}$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-\sqrt{2} & -1 & 0\\ -1 & -\sqrt{2} & -1\\ 0 & -1 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

将$\lambda_2=-\sqrt{2}$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-\sqrt{2} & -1 & 0\\ -1 & -\sqrt{2} & -1\\ 0 & -1 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\quad 有基础解系\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 1\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

将$\lambda_2=-\sqrt{2}$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_2=-\sqrt{2}$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

将$\lambda_2=-\sqrt{2}$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 有基础解系\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_2=-\sqrt{2}$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \middle| k是任意不为0的数 \right\}$$

将$\lambda_3=\sqrt{2}$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

将$\lambda_2=-\sqrt{2}$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_2=-\sqrt{2}$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}$$

将$\lambda_3=\sqrt{2}$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_3=\sqrt{2}$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_3=\sqrt{2}$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}$$

由于对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的，而所求特征向量 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ 分别属于特征值$\lambda_1=0$, $\lambda_2=-\sqrt{2}$, $\lambda_3=\sqrt{2}$，

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_3=\sqrt{2}$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}$$

由于对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的，而所求特征向量 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ 分别属于特征值$\lambda_1=0$, $\lambda_2=-\sqrt{2}$, $\lambda_3=\sqrt{2}$，所以它们已经是两两正交的.

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_3=\sqrt{2}$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 1\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}$$

由于对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的，而所求特征向量 $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\1\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\1\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ 分别属于特征值$\lambda_1=0$, $\lambda_2=-\sqrt{2}, \lambda_3=\sqrt{2}$，所以它们已经是两两正交的.如下只要对它们单位化.

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_3=\sqrt{2}$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 1\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}$$

由于对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的，而所求特征向量 $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\1\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\1\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ 分别属于特征值$\lambda_1=0$, $\lambda_2=-\sqrt{2}$, $\lambda_3=\sqrt{2}$，所以它们已经是两两正交的.如下只要对它们单位化. $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$单位化为$\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，

习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_3 = \sqrt{2}$的全部特征向量为

$$\left\{ k \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}$$

由于对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的，而所求特征向量 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ 分别属于特征值$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$, $\lambda_3 = \sqrt{2}$，所以它们已经是两两正交的.如下只要对它们单位化. $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 单位化为 $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ 单位化为 $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \text{单位化为} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \text{单位化为} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(2)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \text{单位化为} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(2)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-3).$$

习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \text{单位化为} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(2)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 3).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3.$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$单位化为$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(2)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-3).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=3.$

将$\lambda_1=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

$$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\1\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\text{单位化为}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

(2)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-1&\lambda-1&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-3).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=3.$

将$\lambda_1=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\text{，有基础解系}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_1=0$的全部特征向量为

$$\left\{\ k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}|k_1,k_2\text{不同时为0}\ \right\}$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_1=0$的全部特征向量为

$$\left\{ k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \middle| k_1,k_2\text{不同时为0} \right\}$$

将$\lambda_2=3$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_1=0$的全部特征向量为

$$\left\{ k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \middle| k_1,k_2\text{不同时为0} \right\}$$

将$\lambda_2=3$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_1=0$的全部特征向量为

$$\left\{ k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \middle| k_1,k_2\text{不同时为0} \right\}$$

将$\lambda_2=3$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_2=3$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}.$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

将属于特征值$\lambda_1=0$的两个线性无关的特征向量正交化.

习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

将属于特征值$\lambda_1 = 0$的两个线性无关的特征向量正交化.

取$\beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

将属于特征值$\lambda_1=0$的两个线性无关的特征向量正交化.

取$\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$,

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

将属于特征值$\lambda_1=0$的两个线性无关的特征向量正交化.

取$\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$，则

$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$是属于特征值$\lambda_1=0$的两个正交的特征向量.

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

将属于特征值$\lambda_1=0$的两个线性无关的特征向量正交化.

取$\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$，则

$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$是属于特征值$\lambda_1=0$的两个正交的特征向量.

再将其单位化.

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

将属于特征值$\lambda_1=0$的两个线性无关的特征向量正交化.

取$\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$，则

$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$是属于特征值$\lambda_1=0$的两个正交的特征向量.

再将其单位化.

$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$单位化为$\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$单位化为$\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6}\\-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

属于特征值$\lambda_2=3$的特征向量$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$单位化为$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$.

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

属于特征值$\lambda_2=3$的特征向量$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$单位化为$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$.

(3)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\0 & \lambda+1 & 0\\0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

属于特征值$\lambda_2=3$的特征向量$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$单位化为$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$.

(3)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\0 & \lambda+1 & 0\\0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)\ .$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

属于特征值$\lambda_2=3$的特征向量$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$单位化为$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$.

(3)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\0 & \lambda+1 & 0\\0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)\ .$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=1;\ \lambda_2=-1.$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

属于特征值$\lambda_2=3$的特征向量$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$单位化为$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$.

(3)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\0 & \lambda+1 & 0\\0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)\ .$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=1;\ \lambda_2=-1.$

将$\lambda_1=1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

属于特征值$\lambda_2=3$的特征向量$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$单位化为$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$.

(3)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\0 & \lambda+1 & 0\\0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)\ .$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=1;\ \lambda_2=-1.$

将$\lambda_1=1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \text{有基础解系}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_1=1$的全部特征向量为

$$\left\{\ k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\middle|k_1,k_2\text{不同时为0}\ \right\}$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_1=1$的全部特征向量为

$$\left\{\ k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}|k_1,k_2\text{不同时为0}\ \right\}$$

将$\lambda_1=-1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_1 = 1$的全部特征向量为

$$\left\{ k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k_1, k_2 \text{不同时为0} \right\}$$

将$\lambda_1 = -1$代入齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = 0$，得

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_1=1$的全部特征向量为

$$\left\{ k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \middle| k_1,k_2\text{不同时为0} \right\}$$

将$\lambda_1=-1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\text{，有基础解系}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_1=-1$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_1=1$的全部特征向量为

$$\left\{ k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \middle| k_1,k_2\text{不同时为0} \right\}$$

将$\lambda_1=-1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\text{，有基础解系}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_1=-1$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}$$

所求特征值的特征向量就是正交的单位向量.

习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

(4) 矩阵的特征多项式为 $|\lambda I - A| =$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

(4) 矩阵的特征多项式为 $|\lambda I-A|=$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-1+\sqrt{2})(\lambda-1-\sqrt{2})\ .$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

(4) 矩阵的特征多项式为 $|\lambda I-A|=$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-1+\sqrt{2})(\lambda-1-\sqrt{2})\ .$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=1;\ \lambda_2=1-\sqrt{2},\ \lambda_3=1+\sqrt{2}.$

习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

(4) 矩阵的特征多项式为 $|\lambda I - A| =$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-1+\sqrt{2})(\lambda-1-\sqrt{2}) .$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 1-\sqrt{2}$, $\lambda_3 = 1+\sqrt{2}$.

将$\lambda_1 = 1$代入齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = 0$，得

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

(4) 矩阵的特征多项式为 $|\lambda I - A| =$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-1+\sqrt{2})(\lambda-1-\sqrt{2}) \ .$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 1-\sqrt{2},\ \lambda_3 = 1+\sqrt{2}.$

将$\lambda_1 = 1$代入齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = 0$，得

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\quad \text{有基础解系} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

(4) 矩阵的特征多项式为 $|\lambda I-A|=$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-1+\sqrt{2})(\lambda-1-\sqrt{2})\,.$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=1;\ \lambda_2=1-\sqrt{2},\ \lambda_3=1+\sqrt{2}.$

将$\lambda_1=1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\quad 有基础解系\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_1=1$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k是任意不为0的数 \right\}$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

将$\lambda_2=1-\sqrt{2}$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

将$\lambda_2=1-\sqrt{2}$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-\sqrt{2} & 1 & 0\\ 1 & -\sqrt{2} & 1\\ 0 & 1 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}，\quad 有基础解系\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}.$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

将$\lambda_2=1-\sqrt{2}$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_2=1-\sqrt{2}$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

将$\lambda_2=1-\sqrt{2}$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\quad 有基础解系\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_2=1-\sqrt{2}$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k是任意不为0的数 \right\}$$

将$\lambda_3=1+\sqrt{2}$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，$$

习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

将$\lambda_2 = 1-\sqrt{2}$代入齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = 0$，得

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_2 = 1-\sqrt{2}$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}$$

将$\lambda_3 = 1+\sqrt{2}$代入齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = 0$，得

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_3=1+\sqrt{2}$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_3=1+\sqrt{2}$的全部特征向量为

$$\left\{\ k\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\ \middle|\, k\text{是任意不为0的数}\ \right\}$$

因为A是实对称矩阵，属于不同特征值的特征向量是正交的.

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_3=1+\sqrt{2}$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}$$

因为A是实对称矩阵，属于不同特征值的特征向量是正交的. 所求特征向量已是正交向量组.

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_3=1+\sqrt{2}$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}$$

因为A是实对称矩阵，属于不同特征值的特征向量是正交的. 所求特征向量已是正交向量组.

只要对其单位化.

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_3=1+\sqrt{2}$的全部特征向量为

$$\left\{ k\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意不为0的数} \right\}$$

因为A是实对称矩阵，属于不同特征值的特征向量是正交的.
所求特征向量已是正交向量组.

只要对其单位化.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\text{单位化为}\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\text{单位化为}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\text{单位化为}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

宿州学院 SUZHOU UNIVERSITY

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

2.解

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

2.解 由习题1.的结论.

习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

2.解 由习题1.的结论.

(1)取$P = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

2.解 由习题1.的结论.

(1)取$P=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，则$P$是正交矩阵，且

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

2.解 由习题1.的结论.

(1)取$P=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，则$P$是正交矩阵，且

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(2)取$P=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$，

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

2.解 由习题1.的结论.

(1)取$P=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，则$P$是正交矩阵，且

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(2)取$P=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$，则$P$是正交矩阵，且

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

(3)取$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

(3)取$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则$P$是正交矩阵，且

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

(3)取$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则$P$是正交矩阵，且

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

(4)取$P=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

(3)取$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则$P$是正交矩阵，且

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

(4)取$P=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，则$P$是正交矩阵，且

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1-\sqrt{2}&0\\0&0&1+\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

3.解

习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

3.解 (1)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

3.解 (1)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-3).$$

习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

3.解 (1)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-3).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3.$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

3.解 (1)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-3).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=3.$

将$\lambda_1=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

3.解 (1)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-3).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=3.$

将$\lambda_1=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}，\quad 有基础解系\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

3.解 (1)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-3).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=3.$

将$\lambda_1=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_1=0$的线性无关的特征向量为

$$\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

习题5.3$(P_{178}-P_{178})$

将$\lambda_2=3$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

将$\lambda_2=3$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\quad 有基础解系\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

将$\lambda_2=3$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\ \text{有基础解系}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_2=3$的线性无关是特征向量为$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

将$\lambda_2=3$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_2=3$的线性无关是特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

将属于特征值$\lambda_1=0$的两个线性无关的特征向量正交化.

习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

将$\lambda_2 = 3$代入齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = 0$，得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_2 = 3$的线性无关是特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

将属于特征值$\lambda_1 = 0$的两个线性无关的特征向量正交化.

取$\beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

将$\lambda_2 = 3$代入齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = 0$，得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_2 = 3$的线性无关是特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

将属于特征值$\lambda_1 = 0$的两个线性无关的特征向量正交化.

取$\beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$，

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

将$\lambda_2=3$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_2=3$的线性无关是特征向量为$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

将属于特征值$\lambda_1=0$的两个线性无关的特征向量正交化.

取$\beta_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$，则

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$是属于特征值$\lambda_1=0$的两个正交的特征向量.

习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

再将其单位化.

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

再将其单位化.

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\text{单位化为}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}\text{单位化为}\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6}\\-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

再将其单位化.

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\text{单位化为}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}\text{单位化为}\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6}\\-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$$

属于特征值$\lambda_2=3$的特征向量$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$单位化为$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$.

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

再将其单位化.

$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$单位化为$\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$单位化为$\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6}\\-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$

属于特征值$\lambda_2=3$的特征向量$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$单位化为$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$.

取$Q=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$，

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

再将其单位化.

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\text{单位化为}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}\text{单位化为}\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6}\\-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$$

属于特征值$\lambda_2=3$的特征向量$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$单位化为$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$.

取$Q=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{3}}{3}\\0&\frac{\sqrt{6}}{3}&\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$，则$Q$是正交矩阵，

且$Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

(2)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2 & -4\\ -2 & \lambda & -2\\ -4 & -2 & \lambda-3\end{vmatrix}$$

习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

(2)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(\lambda-8).$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

(2)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2 & -4\\ -2 & \lambda & -2\\ -4 & -2 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-8).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=8.$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

(2)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2 & -4\\ -2 & \lambda & -2\\ -4 & -2 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-8).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=8.$

将$\lambda_1=-1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-4 & -2 & -4\\ -2 & -1 & -2\\ -4 & -2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

(2)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2 & -4\\ -2 & \lambda & -2\\ -4 & -2 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-8).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=8.$

将$\lambda_1=-1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-4 & -2 & -4\\ -2 & -1 & -2\\ -4 & -2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

(2)矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2 & -4\\ -2 & \lambda & -2\\ -4 & -2 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-8).$$

所以矩阵有特征值$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=8.$

将$\lambda_1=-1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-4 & -2 & -4\\ -2 & -1 & -2\\ -4 & -2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\quad 有基础解系\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_1=-1$的线性无关的特征向量为

$$\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

将$\lambda_2=8$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

将$\lambda_2 = 8$代入齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = 0$，得

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

将$\lambda_2 = 8$代入齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = 0$，得

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\quad 有基础解系\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_2 = 8$的线性无关是特征向量为 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

将$\lambda_2=8$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\quad 有基础解系\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_2=8$的线性无关是特征向量为$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

将属于特征值$\lambda_1=-1$的两个线性无关的特征向量正交化.

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

将$\lambda_2=8$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\quad 有基础解系\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_2=8$的线性无关是特征向量为 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

将属于特征值$\lambda_1=-1$的两个线性无关的特征向量正交化.

取$\beta_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

将$\lambda_2=8$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}5&-2&-4\\-2&8&-2\\-4&-2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_2=8$的线性无关是特征向量为 $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

将属于特征值$\lambda_1=-1$的两个线性无关的特征向量正交化.

取$\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}, \beta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\-\frac{2}{5}\\1\end{pmatrix}$，

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

将$\lambda_2=8$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\quad 有基础解系\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_2=8$的线性无关是特征向量为 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

将属于特征值$\lambda_1=-1$的两个线性无关的特征向量正交化.

取$\beta_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$，则

$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$是属于特征值$\lambda_1=-1$的两个正交的特征向量.

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

再将其单位化.

习题5.3($P_{178} - P_{178}$)

再将其单位化.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{单位化为} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \text{单位化为} \begin{pmatrix} -\frac{4\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

再将其单位化.

$\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$单位化为$\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\-\frac{2}{5}\\1\end{pmatrix}$单位化为$\begin{pmatrix}-\frac{4\sqrt{5}}{15}\\-\frac{2\sqrt{5}}{15}\\\frac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}$

属于特征值$\lambda_2=8$的特征向量$\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$单位化为$\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

再将其单位化.

$$\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\text{单位化为}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\-\frac{2}{5}\\1\end{pmatrix}\text{单位化为}\begin{pmatrix}-\frac{4\sqrt{5}}{15}\\-\frac{2\sqrt{5}}{15}\\\frac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}$$

属于特征值$\lambda_2=8$的特征向量$\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$单位化为$\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

取$Q=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{5}}{5}&-\frac{4\sqrt{5}}{15}&\frac{2}{3}\\\frac{2\sqrt{5}}{5}&-\frac{2\sqrt{5}}{15}&\frac{1}{3}\\0&\frac{\sqrt{5}}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$,

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

再将其单位化.

$$\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\text{单位化为}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\-\frac{2}{5}\\1\end{pmatrix}\text{单位化为}\begin{pmatrix}-\frac{4\sqrt{5}}{15}\\-\frac{2\sqrt{5}}{15}\\\frac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}$$

属于特征值$\lambda_2=8$的特征向量$\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$单位化为$\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

取$Q=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{5}}{5}&-\frac{4\sqrt{5}}{15}&\frac{2}{3}\\\frac{2\sqrt{5}}{5}&-\frac{2\sqrt{5}}{15}&\frac{1}{3}\\0&\frac{\sqrt{5}}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$，则$Q$是正交矩阵，

且$Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&8\end{pmatrix}$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

4.解

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

4.解 矩阵A的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 4\\ 2 & \lambda-a & 2\\ 4 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

4.解 矩阵A的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 4\\ 2 & \lambda-a & 2\\ 4 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

又因为A与对角矩阵D相似，所以A有特征值

$5,\ -4,\ b$,

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

4.解 矩阵A的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 4\\ 2 & \lambda-a & 2\\ 4 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

又因为A与对角矩阵D相似，所以A有特征值

$5,\ -4,\ b$，即$|-4I-A|=\begin{vmatrix}-5 & 2 & 4\\ 2 & -4-a & 2\\ 4 & 2 & -5\end{vmatrix}=0.$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

4.解 矩阵A的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 4\\ 2 & \lambda-a & 2\\ 4 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

又因为A与对角矩阵D相似，所以A有特征值

$5,\ -4,\ b$，即$$|-4I-A|=\begin{vmatrix}-5 & 2 & 4\\ 2 & -4-a & 2\\ 4 & 2 & -5\end{vmatrix}=0.$$

可得$a=4.$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

4.解 矩阵A的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 4\\ 2 & \lambda-a & 2\\ 4 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

又因为A与对角矩阵D相似，所以A有特征值

$5,\ -4,\ b$，即$|-4I-A|=\begin{vmatrix}-5 & 2 & 4\\ 2 & -4-a & 2\\ 4 & 2 & -5\end{vmatrix}=0.$

可得$a=4.$

在$a=4$时，

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 4\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 4 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

4.解 矩阵A的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 4\\ 2 & \lambda-a & 2\\ 4 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

又因为A与对角矩阵D相似，所以A有特征值

$5, -4, b$，即$|-4I-A|=\begin{vmatrix}-5 & 2 & 4\\ 2 & -4-a & 2\\ 4 & 2 & -5\end{vmatrix}=0.$

可得$a=4.$

在$a=4$时，

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 4\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 4 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)^2(\lambda+4)$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

矩阵A有特征值$\lambda_1=5$，$\lambda_2=-4$，且$\lambda_1=5$是二重的.

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

矩阵A有特征值$\lambda_1=5$，$\lambda_2=-4$，且$\lambda_1=5$是二重的.
所以$b=5$.

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

矩阵A有特征值$\lambda_1=5$，$\lambda_2=-4$，且$\lambda_1=5$是二重的.
所以$b=5$.
将$\lambda_1=5$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}4&2&4\\2&1&2\\4&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

矩阵A有特征值$\lambda_1=5$, $\lambda_2=-4$，且$\lambda_1=5$是二重的.
所以$b=5$.
将$\lambda_1=5$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}4&2&4\\2&1&2\\4&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

矩阵A有特征值$\lambda_1=5$，$\lambda_2=-4$，且$\lambda_1=5$是二重的.

所以$b=5$.

将$\lambda_1=5$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\quad 有基础解系\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_1=5$的线性无关是特征向量为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

矩阵A有特征值$\lambda_1=5$，$\lambda_2=-4$，且$\lambda_1=5$是二重的.

所以$b=5$.

将$\lambda_1=5$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}4&2&4\\2&1&2\\4&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\quad \text{有基础解系}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_1=5$的线性无关是特征向量为

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

将$\lambda_2=-4$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-5&2&4\\2&-8&2\\4&2&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

矩阵A有特征值$\lambda_1=5$，$\lambda_2=-4$，且$\lambda_1=5$是二重的.

所以$b=5$.

将$\lambda_1=5$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}4&2&4\\2&1&2\\4&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\quad 有基础解系\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

所以属于特征值$\lambda_1=5$的线性无关是特征向量为

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

将$\lambda_2=-4$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-5&2&4\\2&-8&2\\4&2&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\quad 有基础解系\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}.$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_2=-4$线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_2=-4$线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

将属于特征值$\lambda_1=5$的两个线性无关的特征向量正交化.

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_2=-4$线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

将属于特征值$\lambda_1=5$的两个线性无关的特征向量正交化.

取$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$,

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_2=-4$线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

将属于特征值$\lambda_1=5$的两个线性无关的特征向量正交化.

取$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{-1}{5}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\-\frac{2}{5}\\1\end{pmatrix}$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_2=-4$线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

将属于特征值$\lambda_1=5$的两个线性无关的特征向量正交化.

取$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{-1}{5}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\-\frac{2}{5}\\1\end{pmatrix}$

再单位化得属于特征值$\lambda_1=5$的两个正交的单位特征向量

$$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{5}\\-\frac{2\sqrt{5}}{5}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{4\sqrt{5}}{15}\\-\frac{2\sqrt{5}}{15}\\\frac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

所以属于特征值$\lambda_2=-4$线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

将属于特征值$\lambda_1=5$的两个线性无关的特征向量正交化.

取$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{-1}{5}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\-\frac{2}{5}\\1\end{pmatrix}$

再单位化得属于特征值$\lambda_1=5$的两个正交的单位特征向量

$$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{5}\\-\frac{2\sqrt{5}}{5}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{4\sqrt{5}}{15}\\-\frac{2\sqrt{5}}{15}\\\frac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}$$

将属于特征值$\lambda_2=-4$的特征向量单位化得$\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

$$\text{取}Q=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2}{3} & -\frac{4\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{5}}{15} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix},$$

习题5.3($P_{178}-P_{178}$)

取$Q=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2}{3} & -\frac{4\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{5}}{15} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$，则$Q$是正交矩阵，且
$Q^TAQ=Q^{-1}AQ=D.$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

1.解

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

1.解 (1)二次型的矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

1.解 (1)二次型的矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

(2)二次型的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

1.解 (1)二次型的矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

(2)二次型的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

2.解

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

1.解 (1)二次型的矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

(2)二次型的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

2.解 (1)二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$,

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

其特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix}$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

其特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+1)(\lambda-1)$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

其特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+1)(\lambda-1)$$

二次型的特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=1.$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

其特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+1)(\lambda-1)$$

二次型的特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=-1,\ \ \lambda_3=1.$

将$\lambda_1=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

其特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+1)(\lambda-1)$$

二次型的特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=-1,\ \ \lambda_3=1.$

将$\lambda_1=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}，\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$$ 为其基础解系.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

属于特征值$\lambda_1=0$的线性无关是特征向量为

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

属于特征值$\lambda_1=0$的线性无关是特征向量为

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

将$\lambda_2=-1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-1&-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-1&-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

属于特征值$\lambda_1=0$的线性无关是特征向量为

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

将$\lambda_2=-1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-1&-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-1&-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}，\quad 有基础解系\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

属于特征值$\lambda_2=-1$的线性无关是特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

属于特征值$\lambda_2=-1$的线性无关是特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

将$\lambda_3=1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

属于特征值$\lambda_2=-1$的线性无关是特征向量为$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

将$\lambda_3=1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\text{，有基础解系}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

属于特征值$\lambda_2=-1$的线性无关是特征向量为$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

将$\lambda_3=1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad 有基础解系\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

属于特征值$\lambda_3=1$的线性无关是特征向量为$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

所求属于特征值$\lambda_1 = 0$线性无关的特征向量已是正交向量，

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

所求属于特征值$\lambda_1=0$线性无关的特征向量已是正交向量，只要单位化.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

所求属于特征值$\lambda_1=0$线性无关的特征向量已是正交向量，只要单位化.

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\text{单位化为}\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\text{单位化为}\begin{pmatrix}0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

所求属于特征值$\lambda_1=0$线性无关的特征向量已是正交向量，只要单位化.

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\text{单位化为}\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\text{单位化为}\begin{pmatrix}0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

属于特征值$\lambda_2=-1$的特征向量单位化为$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

属于特征值$\lambda_3=1$的特征向量单位化为$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

属于特征值$\lambda_3=1$的特征向量单位化为$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

取$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$,

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

属于特征值$\lambda_3=1$的特征向量单位化为$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

取$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$，则$Q$是正交矩阵，且

$$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

令$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$,

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

令$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$，则为可逆的线性变换，且化原二次型为$y_1^2-y_2^2$.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

令$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$，则为可逆的线性变换，且化原二次型为$y_1^2-y_2^2$.

(2)二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

令$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$，则为可逆的线性变换，且化原二次型为$y_1^2 - y_2^2$.

(2)二次型的矩阵为$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

二次型矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda-1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

令$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$，则为可逆的线性变换，且化原二次型为$y_1^2 - y_2^2$.

(2)二次型的矩阵为$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

二次型矩阵的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda - 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - \tfrac{1}{2})^2(\lambda - 2)$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

令$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$，则为可逆的线性变换，且化原二次型为$y_1^2-y_2^2$.

(2)二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

二次型矩阵的特征多项式

$$|\lambda I-A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda-1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-\tfrac{1}{2})^2(\lambda-2)$$

A有两个特征值$\lambda_1=\frac{1}{2}$, $\lambda_2=2$.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将$\lambda_1=\frac{1}{2}$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将$\lambda_1=\frac{1}{2}$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将$\lambda_1=\frac{1}{2}$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

即属于特征值$\lambda_1=\frac{1}{2}$线性无关的特征向量是$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将$\lambda_1=\frac{1}{2}$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

即属于特征值$\lambda_1=\frac{1}{2}$线性无关的特征向量是$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

.

将$\lambda_2=2$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将$\lambda_1=\frac{1}{2}$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

即属于特征值$\lambda_1=\frac{1}{2}$线性无关的特征向量是$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

将$\lambda_2=2$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将属于特征值$\lambda_1 = \frac{1}{2}$的特征向量正交化并单位化.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将属于特征值$\lambda_1=\frac{1}{2}$的特征向量正交化并单位化. 取

$$\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \beta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将属于特征值$\lambda_1=\frac{1}{2}$的特征向量正交化并单位化. 取

$$\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \beta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

单位化为$\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6}\\-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将属于特征值$\lambda_1=\frac{1}{2}$的特征向量正交化并单位化. 取

$$\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \beta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

单位化为$\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6}\\-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$

属于特征值$\lambda_2=2$的特征值单位化得$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将属于特征值$\lambda_1=\frac{1}{2}$的特征向量正交化并单位化. 取

$$\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \beta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

单位化为$\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6}\\-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$

属于特征值$\lambda_2=2$的特征值单位化得$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$

取$Q=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&0&\frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$,

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将属于特征值$\lambda_1=\frac{1}{2}$的特征向量正交化并单位化. 取

$$\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \beta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

单位化为$\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6}\\-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$

属于特征值$\lambda_2=2$的特征值单位化得$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$

取$Q=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&0&\frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$，则$Q$是正交矩阵，且

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

$$Q^{-1}AQ = Q^{T}AQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

$$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

令$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&0&\frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$,

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

$$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

令$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&0&\frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，则其是可逆线性变换，且化原二次型为$2y_1^2+\frac{1}{2}y_2^2+\frac{1}{2}y_3^2$.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

$$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

令$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&0&\frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，则其是可逆线性变换，且化原二次型为$2y_1^2+\frac{1}{2}y_2^2+\frac{1}{2}y_3^2$.

(3)二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

其特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-3 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

其特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-3 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-4)$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

其特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-3 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-4)$$

有特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=4$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

其特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-3 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-4)$$

有特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=4$

将$\lambda_1=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & -3 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

其特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-3 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-4)$$

有特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=4$

将$\lambda_1=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & -3 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

其特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-3 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-4)$$

有特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=4$

将$\lambda_1=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & -3 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}，\quad \text{有基础解系}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

属于特征值$\lambda_1=0$线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将$\lambda_2=1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将$\lambda_2=1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\quad 有基础解系\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将$\lambda_2=1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

属于特征值$\lambda_2=1$线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将$\lambda_2=1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

属于特征值$\lambda_2=1$线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

将$\lambda_3=4$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将$\lambda_2=1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

属于特征值$\lambda_2=1$线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

将$\lambda_3=4$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将$\lambda_2=1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

属于特征值$\lambda_2=1$线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

将$\lambda_3=4$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

属于特征值$\lambda_3=4$线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将分别属于特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=4$单位化分别得

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将分别属于特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=4$单位化分别得

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

取$Q=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{6}}{6} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$,

习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将分别属于特征值$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 4$单位化分别得

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

取$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{6}}{6} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$，则$Q$是正交矩阵，且

$$Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将分别属于特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=4$单位化分别得

$$\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\-\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{2\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}$$

取$Q=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{2\sqrt{6}}{6}&0\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$，则$Q$是正交矩阵，且

$$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

令$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{2\sqrt{6}}{6}&0\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

则其是可逆线性变换，且化原二次型为$y_1^2+4y_2^2$.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

则其是可逆线性变换，且化原二次型为$y_1^2+4y_2^2$.

3.(更正：考虑到计算量，将本题中的矩阵A更改为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix})$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

则其是可逆线性变换，且化原二次型为$y_1^2+4y_2^2$.

3.(更正：考虑到计算量，将本题中的矩阵A更改为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix})$$

解

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

则其是可逆线性变换，且化原二次型为$y_1^2+4y_2^2$.

3.(更正：考虑到计算量，将本题中的矩阵A更改为

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\-1&0&a\end{pmatrix})$$

解 $$A'A=\begin{pmatrix}2&0&1-a\\0&1&0\\1-a&0&1+a^2\end{pmatrix}$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

则其是可逆线性变换，且化原二次型为$y_1^2+4y_2^2$.

3.(更正：考虑到计算量，将本题中的矩阵A更改为

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\-1&0&a\end{pmatrix})$$

解 $A'A=\begin{pmatrix}2&0&1-a\\0&1&0\\1-a&0&1+a^2\end{pmatrix}$

(1)对$A'A$进行初等行变换$A'A\to\begin{pmatrix}2&0&1-a\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}(1+a)^2\end{pmatrix}$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

则其是可逆线性变换，且化原二次型为$y_1^2+4y_2^2$.

3.(更正：考虑到计算量，将本题中的矩阵A更改为

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\-1&0&a\end{pmatrix})$$

解 $$A'A=\begin{pmatrix}2&0&1-a\\0&1&0\\1-a&0&1+a^2\end{pmatrix}$$

(1)对$A'A$进行初等行变换$A'A\to\begin{pmatrix}2&0&1-a\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}(1+a)^2\end{pmatrix}$

由于A的秩$r(A)=2$，所以$\frac{1}{2}(1+a)^2=0$，$a=-1$.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

(2)二次型的矩阵$A'A=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

(2)二次型的矩阵$A'A=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}$

(3) 二次型矩阵的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{pmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-1&0\\-2&0&\lambda-2\end{pmatrix}$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

(2)二次型的矩阵$A'A=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}$

(3) 二次型矩阵的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{pmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-1&0\\-2&0&\lambda-2\end{pmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-4)$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

(2)二次型的矩阵$A'A=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}$

(3) 二次型矩阵的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{pmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-1&0\\-2&0&\lambda-2\end{pmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-4)$$

有特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=4.$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

(2)二次型的矩阵$A'A=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}$

(3) 二次型矩阵的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{pmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-1&0\\-2&0&\lambda-2\end{pmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-4)$$

有特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=4.$

将特征值$\lambda_1=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-2&0&-2\\0&-1&0\\-2&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

(2)二次型的矩阵$A'A=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}$

(3) 二次型矩阵的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{pmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-1&0\\-2&0&\lambda-2\end{pmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-4)$$

有特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=4.$

将特征值$\lambda_1=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-2&0&-2\\0&-1&0\\-2&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\quad \text{有基础解系}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

属于特征值$\lambda_1 = 0$线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

习题5.4$(P_{179}-P_{180})$

属于特征值$\lambda_1=0$线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

将$\lambda_2=1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

属于特征值$\lambda_1=0$线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

将$\lambda_2=1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$ 有基础解系$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

属于特征值$\lambda_1=0$线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

将$\lambda_2=1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$\begin{pmatrix}-1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，有基础解系$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

属于特征值$\lambda_2=1$的线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

属于特征值$\lambda_1 = 0$线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

将$\lambda_2 = 1$代入齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = 0$，得

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

属于特征值$\lambda_2 = 1$的线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

将特征值$\lambda_3 = 4$代入齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = 0$，得

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

属于特征值$\lambda_1=0$线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

将$\lambda_2=1$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

属于特征值$\lambda_2=1$的线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

将特征值$\lambda_3=4$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&3&0\\-2&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将分别属于特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=4$的线性无关的特征向量单位化，得 $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将分别属于特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=4$的线性无关的特征向量单位化，得 $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

取$Q=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$，

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将分别属于特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=4$的线性无关的特征向量单位化，得$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

取$Q=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$，则$Q$是正交矩阵，且

$$Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将分别属于特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=4$的线性无关的特征向量单位化，得 $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

取$Q=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$，则$Q$是正交矩阵，且

$$Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

令$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

则其为正交变换，且化原二次型为标准形$y_1^2+4y_2^2$.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

则其为正交变换，且化原二次型为标准形$y_1^2+4y_2^2$.

4.解 二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

则其为正交变换，且化原二次型为标准形$y_1^2+4y_2^2$.

4.解 二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$

矩阵的特征多项式 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & 0 & -b \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -b & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

则其为正交变换，且化原二次型为标准形$y_1^2+4y_2^2$.

4.解 二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$

矩阵的特征多项式 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & 0 & -b \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -b & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=$
$(\lambda-2)[\lambda^2+(2-a)\lambda-(2a+b^2)]$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

则其为正交变换，且化原二次型为标准形$y_1^2+4y_2^2$.

4.解 二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$

矩阵的特征多项式 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & 0 & -b \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -b & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=$
$(\lambda-2)[\lambda^2+(2-a)\lambda-(2a+b^2)]$

A有特征值$\lambda_1=2$,

另外的特征值为 $\lambda^2+(2-a)\lambda-(2a+b^2)=0$的根.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

则其为正交变换，且化原二次型为标准形$y_1^2+4y_2^2$.

4.解 二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$

矩阵的特征多项式 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & 0 & -b \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -b & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=$
$(\lambda-2)[\lambda^2+(2-a)\lambda-(2a+b^2)]$

A有特征值$\lambda_1=2$，

另外的特征值为 $\lambda^2+(2-a)\lambda-(2a+b^2)=0$的根.

(1)由于A的特征值之和为1，特征值之积为-12，

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

则其为正交变换，且化原二次型为标准形$y_1^2+4y_2^2$.

4.解 二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$

矩阵的特征多项式 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & 0 & -b \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -b & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=$ $(\lambda-2)[\lambda^2+(2-a)\lambda-(2a+b^2)]$

A有特征值$\lambda_1=2$,

另外的特征值为 $\lambda^2+(2-a)\lambda-(2a+b^2)=0$的根.

(1)由于A的特征值之和为1，特征值之积为-12，而矩阵A已经有特征值$\lambda_1=2$，所以$\lambda^2+(2-a)\lambda-(2a+b^2)=0$的两个之和为$-1$，两根之积为$-6$.

习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

由维达定理，$\begin{cases} 2-a=1 \\ -(2a+b^2)=-6 \end{cases}$，所以$\begin{cases} a=1 \\ b=\pm 2 \end{cases}$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

由维达定理，$\begin{cases} 2-a=1 \\ -(2a+b^2)=-6 \end{cases}$，所以$\begin{cases} a=1 \\ b=\pm 2 \end{cases}$

(2)在$a=1$，$b=2$时，二次型的特征多项式为

$$|\lambda I-A|$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

由维达定理，$\begin{cases} 2-a=1 \\ -(2a+b^2)=-6 \end{cases}$，所以$\begin{cases} a=1 \\ b=\pm 2 \end{cases}$

(2)在$a=1$，$b=2$时，二次型的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

由维达定理，$\begin{cases} 2-a=1 \\ -(2a+b^2)=-6 \end{cases}$，所以$\begin{cases} a=1 \\ b=\pm 2 \end{cases}$

(2)在$a=1$，$b=2$时，二次型的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3).$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

由维达定理，$\begin{cases} 2-a=1 \\ -(2a+b^2)=-6 \end{cases}$，所以$\begin{cases} a=1 \\ b=\pm 2 \end{cases}$

(2)在$a=1$，$b=2$时，二次型的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3).$$

有特征值$\lambda_1=2$，$\lambda_2=-3$.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

由维达定理，$\begin{cases} 2-a=1 \\ -(2a+b^2)=-6 \end{cases}$，所以$\begin{cases} a=1 \\ b=\pm 2 \end{cases}$

(2)在$a=1,\ b=2$时，二次型的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3).$$

有特征值$\lambda_1=2,\ \lambda_2=-3.$

将特征值$\lambda_1=2$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

由维达定理，$\begin{cases} 2-a=1 \\ -(2a+b^2)=-6 \end{cases}$，所以$\begin{cases} a=1 \\ b=\pm 2 \end{cases}$

(2)在$a=1$，$b=2$时，二次型的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3).$$

有特征值$\lambda_1=2$，$\lambda_2=-3$.

将特征值$\lambda_1=2$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\quad 有基础解系\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

由维达定理，$\begin{cases} 2-a=1 \\ -(2a+b^2)=-6 \end{cases}$，所以$\begin{cases} a=1 \\ b=\pm 2 \end{cases}$

(2)在$a=1$，$b=2$时，二次型的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3).$$

有特征值$\lambda_1=2$，$\lambda_2=-3$.

将特征值$\lambda_1=2$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\quad 有基础解系\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

属于特征值$\lambda_1=2$的线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将特征值$\lambda_2=-3$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-4 & 0 & -2\\ 0 & -5 & 0\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将特征值$\lambda_2=-3$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-4&0&-2\\0&-5&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$，有基础解系$\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将特征值$\lambda_2=-3$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-4 & 0 & -2\\ 0 & -5 & 0\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}.$$

特征值$\lambda_2=-3$的线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将特征值$\lambda_2=-3$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-4&0&-2\\0&-5&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$，有基础解系$\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$.

特征值$\lambda_2=-3$的线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$.

属于特征值$\lambda_1=2$的线性无关的特征向量已经是正交的，只要单位化.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将特征值$\lambda_2=-3$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-4&0&-2\\0&-5&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$，有基础解系$\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$.

特征值$\lambda_2=-3$的线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$.

属于特征值$\lambda_1=2$的线性无关的特征向量已经是正交的，只要单位化.

$\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$单位化为$\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{5}\\0\\\frac{\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}$，而$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$已经是单位向量.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将属于特征值$\lambda_2=-3$的特征向量单位化为$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将属于特征值$\lambda_2=-3$的特征向量单位化为$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$.

取$Q=\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$,

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将属于特征值$\lambda_2=-3$的特征向量单位化为$\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{5}}{5}\\0\\\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}$.

取$Q=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{5}&0&-\frac{\sqrt{5}}{5}\\0&1&0\\\frac{\sqrt{5}}{5}&0&\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}$，则$Q$是正交矩阵，且

$$Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将属于特征值$\lambda_2=-3$的特征向量单位化为$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$.

取$Q=\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$，则$Q$是正交矩阵，且

$$Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

令$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，则其是正交变换，且

化原二次型为$2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$.

习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

在$a = 1$, $b = -2$时，二次型的特征多项式为

$|\lambda I - A|$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

在$a=1$, $b=-2$时，二次型的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}$$

习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

在$a = 1$, $b = -2$时，二次型的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 3).$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

在$a=1$，$b=-2$时，二次型的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 2\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 2 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3).$$

有特征值$\lambda_1=2$，$\lambda_2=-3$.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

在$a=1$, $b=-2$时，二次型的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 2\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 2 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3).$$

有特征值$\lambda_1=2$, $\lambda_2=-3$.

将特征值$\lambda_1=2$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

在$a=1$，$b=-2$时，二次型的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 2\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 2 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3).$$

有特征值$\lambda_1=2$，$\lambda_2=-3$.

将特征值$\lambda_1=2$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}.$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

在$a=1$，$b=-2$时，二次型的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 2\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 2 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3).$$

有特征值$\lambda_1=2$，$\lambda_2=-3$.

将特征值$\lambda_1=2$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}，\quad 有基础解系\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}.$$

属于特征值$\lambda_1=2$的线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$.

习题5.4$(P_{179}-P_{180})$

将特征值$\lambda_2=-3$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将特征值$\lambda_2=-3$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-4&0&2\\0&-5&0\\2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

将特征值$\lambda_2 = -3$代入齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = 0$，得

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

特征值$\lambda_2 = -3$的线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将特征值$\lambda_2=-3$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-4 & 0 & 2\\ 0 & -5 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}，有基础解系\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}.$$

特征值$\lambda_2=-3$的线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$.

属于特征值$\lambda_1=2$的线性无关的特征向量已经是正交的，只要单位化.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将特征值$\lambda_2=-3$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-4&0&2\\0&-5&0\\2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，有基础解系\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

特征值$\lambda_2=-3$的线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$.

属于特征值$\lambda_1=2$的线性无关的特征向量已经是正交的，只要单位化.

$$\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}单位化为\begin{pmatrix}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\\0\\\frac{\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}，而\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}已经是单位向量.$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将属于特征值$\lambda_2=-3$的特征向量单位化为$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{5}\\0\\\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}$.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将属于特征值$\lambda_2=-3$的特征向量单位化为$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{5}\\0\\\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}$.

取$Q_1=\begin{pmatrix}-\frac{2\sqrt{5}}{5}&0&\frac{\sqrt{5}}{5}\\0&1&0\\\frac{\sqrt{5}}{5}&0&\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}$,

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将属于特征值$\lambda_2=-3$的特征向量单位化为$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{5}\\0\\\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}$.

取$Q_1=\begin{pmatrix}-\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5}\\0 & 1 & 0\\\frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}$，则$Q_1$是正交矩阵，且

$$Q_1^TAQ_1=Q_1^{-1}AQ_1=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将属于特征值$\lambda_2=-3$的特征向量单位化为$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{5}\\0\\\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}$.

取$Q_1=\begin{pmatrix}-\frac{2\sqrt{5}}{5}&0&\frac{\sqrt{5}}{5}\\0&1&0\\\frac{\sqrt{5}}{5}&0&\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}$，则$Q_1$是正交矩阵，且

$$Q_1^TAQ_1=Q_1^{-1}AQ_1=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$$

令$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2\sqrt{5}}{5}&0&\frac{\sqrt{5}}{5}\\0&1&0\\\frac{\sqrt{5}}{5}&0&\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，则其是正交变换，

且化原二次型为$2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$.

习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

5.解

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

5.解 (1) 二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$,

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

5.解 (1) 二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，对$A$实施初等行变换， $A\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

5.解 (1) 二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，对$A$实施初等行变换， $A\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

而A的秩为2，所以$a=0$.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

5.解 (1) 二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，对$A$实施初等行变换，$A\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

而A的秩为2，所以$a=0$.

(2)在$a=0$时，二次型的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

5.解 (1) 二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，对$A$实施初等行变换，$A\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

而A的秩为2，所以$a=0$.

(2)在$a=0$时，二次型的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

5.解 (1) 二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，对$A$实施初等行变换， $A\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

而A的秩为2，所以$a=0$.

(2)在$a=0$时，二次型的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2$$

有特征值$\lambda_1=0$，$\lambda_2=2$.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

5.解 (1) 二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，对$A$实施初等行变换，$A\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

而A的秩为2，所以$a=0$.

(2)在$a=0$时，二次型的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2$$

有特征值$\lambda_1=0$，$\lambda_2=2$.

将特征值$\lambda_1=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 有基础解系} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \text{有基础解系}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

属于特征值$\lambda_1=0$线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

习题5.4$(P_{179}-P_{180})$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

属于特征值$\lambda_1=0$线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

将特征值$\lambda_2=2$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$，有基础解系$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

属于特征值$\lambda_1=0$线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

将特征值$\lambda_2=2$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$，有基础解系$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

$$\begin{pmatrix}-1&-1&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

属于特征值$\lambda_1=0$线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

将特征值$\lambda_2=2$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\text{有基础解系}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

属于特征值$\lambda_2=2$线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将属于特征值$\lambda_1=0$的特征向量单位化为$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$，

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将属于特征值$\lambda_1=0$的特征向量单位化为$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$，

属于特征值$\lambda_2=2$线性无关的特征向量已经是正交的，将其单位化为 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将属于特征值$\lambda_1=0$的特征向量单位化为$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$，

属于特征值$\lambda_2=2$线性无关的特征向量已经是正交的，将其单位化为$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

取$Q=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

将属于特征值$\lambda_1=0$的特征向量单位化为$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$，

属于特征值$\lambda_2=2$线性无关的特征向量已经是正交的，将其单位化为$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

取$Q=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则$Q$是正交矩阵，且

$$Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

令$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

令$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，则其是正交变换，且化原二次型为$2y_2^2+2y_3^2$.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

令$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，则其是正交变换，且化原二次型为$2y_2^2+2y_3^2$.

(3)$f(x_1, x_2, x_3)=0$当且仅当$2y_2^2+2y_3^2=0$，当且仅当

$$\begin{cases} y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases},$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

令$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，则其是正交变换，且化原二次型为$2y_2^2+2y_3^2$.

(3)$f(x_1, x_2, x_3)=0$当且仅当$2y_2^2+2y_3^2=0$，当且仅当$\begin{cases} y_2=0 \\ y_3=0 \end{cases}$，而$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

令$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，则其是正交变换，且化原二次型为$2y_2^2+2y_3^2$.

(3)$f(x_1,x_2,x_3)=0$当且仅当$2y_2^2+2y_3^2=0$，当且仅当$\begin{cases} y_2=0 \\ y_3=0 \end{cases}$，而$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

令$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3 \end{pmatrix}$，则其是正交变换，且化原二次型为$2y_2^2+2y_3^2$.

(3)$f(x_1, x_2, x_3)=0$当且仅当$2y_2^2+2y_3^2=0$，当且仅当$\begin{cases} y_2=0\\ y_3=0 \end{cases}$，而$\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix}=$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} y_2=\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_2\\ y_3=x_3 \end{cases}$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

令$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，则其是正交变换，且化原二次型为$2y_2^2+2y_3^2$.

(3)$f(x_1,x_2,x_3)=0$当且仅当$2y_2^2+2y_3^2=0$，当且仅当$\begin{cases} y_2=0 \\ y_3=0 \end{cases}$，而$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$

所以$f(x_1,x_2,x_3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_2=0 \\ x_3=0 \end{cases}$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

所以$f(x_1, x_2, x_3)=0$的解集为

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意数} \right\}$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

所以$f(x_1, x_2, x_3)=0$的解集为

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意数} \right\}$$

6.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

所以$f(x_1, x_2, x_3)=0$的解集为

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意数} \right\}$$

6.更正：将α_1更正为$\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

所以$f(x_1, x_2, x_3)=0$的解集为

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意数} \right\}$$

6.更正：将α_1更正为$\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

解

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

所以$f(x_1, x_2, x_3)=0$的解集为

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意数} \right\}$$

6.更正：将α_1更正为$\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

解 因为A的各行元素之和为3，所以$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$，

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

所以$f(x_1, x_2, x_3)=0$的解集为

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意数} \right\}$$

6.更正：将α_1更正为$\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

解 因为A的各行元素之和为3，所以$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$，即

A有特征值$\lambda_1=3$，且属于$\lambda_1=3$的线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

又因为α_1,α_2是$AX=0$的解，且线性无关，

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

又因为α_1,α_2是$AX=0$的解，且线性无关，
α_1,α_2是A属于特征值$\lambda_2=0$的线性无关的特征向量.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

又因为α_1,α_2是$AX=0$的解，且线性无关，

α_1,α_2是A属于特征值$\lambda_2=0$的线性无关的特征向量.

将特征值$\lambda_1=3$的特征向量单位化，得$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

又因为α_1,α_2是$AX=0$的解，且线性无关，

α_1,α_2是A属于特征值$\lambda_2=0$的线性无关的特征向量.

将特征值$\lambda_1=3$的特征向量单位化，得$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$.

将属于特征值$\lambda_2=0$的线性无关的特征向量正交化.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

又因为α_1,α_2是$AX=0$的解，且线性无关，

α_1,α_2是A属于特征值$\lambda_2=0$的线性无关的特征向量.

将特征值$\lambda_1=3$的特征向量单位化，得$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$.

将属于特征值$\lambda_2=0$的线性无关的特征向量正交化.

取$\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}-\frac{-3}{6}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

又因为α_1,α_2是$AX=0$的解，且线性无关，

α_1,α_2是A属于特征值$\lambda_2=0$的线性无关的特征向量.

将特征值$\lambda_1=3$的特征向量单位化，得$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$.

将属于特征值$\lambda_2=0$的线性无关的特征向量正交化.

取$\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}-\frac{-3}{6}\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

再单位化，得$\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{\sqrt{6}}{3}\\ -\frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

即，属于特征值$\lambda_2=0$的正交单位向量为

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

即，属于特征值$\lambda_2=0$的正交单位向量为

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

取$Q=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$,

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

即，属于特征值$\lambda_2=0$的正交单位向量为

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

取$Q=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$，则$Q$是正交矩阵，且

$$Q^TAQ=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=B\text{是对角矩阵}.$$

习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

即，属于特征值$\lambda_2 = 0$的正交单位向量为

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

取$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$，则$Q$是正交矩阵，且

$$Q^T AQ = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B\text{是对角矩阵}.$$

7.解

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

即，属于特征值$\lambda_2=0$的正交单位向量为

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

取$Q=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$，则$Q$是正交矩阵，且

$$Q^TAQ=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=B\text{是对角矩阵.}$$

7.解 (1)二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

特征多项式为 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-(a-1) \end{vmatrix}$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

特征多项式为 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-(a-1) \end{vmatrix}=$

$(\lambda-a)(\lambda-a-1)(\lambda-a+2)$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

特征多项式为 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-(a-1) \end{vmatrix}=$
$(\lambda-a)(\lambda-a-1)(\lambda-a+2)$

有特征值$\lambda_1=a,\ \lambda_2=a+1,\ \lambda_3=a-2.$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

特征多项式为 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & 0 & -1\\ 0 & \lambda-a & 1\\ -1 & 1 & \lambda-(a-1)\end{vmatrix}=(\lambda-a)(\lambda-a-1)(\lambda-a+2)$

有特征值$\lambda_1=a,\ \lambda_2=a+1,\ \lambda_3=a-2.$

(2)由于二次型的标准形为$y_1^2+y_2^2$，所以A的特征值中有两个正的，一个为0.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

特征多项式为 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & 0 & -1\\ 0 & \lambda-a & 1\\ -1 & 1 & \lambda-(a-1)\end{vmatrix}=$ $(\lambda-a)(\lambda-a-1)(\lambda-a+2)$

有特征值$\lambda_1=a,\ \lambda_2=a+1,\ \lambda_3=a-2.$

(2)由于二次型的标准形为$y_1^2+y_2^2$，所以A的特征值中有两个正的，一个为0.

注意到特征值$a,\ a+1,\ a-2$，则$a=2.$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

特征多项式为 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & 0 & -1\\ 0 & \lambda-a & 1\\ -1 & 1 & \lambda-(a-1)\end{vmatrix}=$
$(\lambda-a)(\lambda-a-1)(\lambda-a+2)$

有特征值$\lambda_1=a,\ \lambda_2=a+1,\ \lambda_3=a-2.$

(2)由于二次型的标准形为$y_1^2+y_2^2$，所以A的特征值中有两个正的，一个为0.

注意到特征值$a,\ a+1,\ a-2$，则$a=2.$

本题说明：

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

特征多项式为 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & 0 & -1\\ 0 & \lambda-a & 1\\ -1 & 1 & \lambda-(a-1)\end{vmatrix}=$ $(\lambda-a)(\lambda-a-1)(\lambda-a+2)$

有特征值$\lambda_1=a,\ \lambda_2=a+1,\ \lambda_3=a-2.$

(2)由于二次型的标准形为$y_1^2+y_2^2$，所以A的特征值中有两个正的，一个为0.

注意到特征值$a,\ a+1,\ a-2$，则$a=2.$

本题说明：二次型的标准形不唯一.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

特征多项式为 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & 0 & -1\\ 0 & \lambda-a & 1\\ -1 & 1 & \lambda-(a-1)\end{vmatrix}=$
$(\lambda-a)(\lambda-a-1)(\lambda-a+2)$

有特征值$\lambda_1=a$, $\lambda_2=a+1$, $\lambda_3=a-2$.

(2)由于二次型的标准形为$y_1^2+y_2^2$，所以A的特征值中有两个正的，一个为0.

注意到特征值a, $a+1$, $a-2$，则$a=2$.

本题说明：二次型的标准形不唯一.也就是说，不同的可逆线性变换，会化同一个二次型为不同的标准形.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

特征多项式为 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & 0 & -1\\ 0 & \lambda-a & 1\\ -1 & 1 & \lambda-(a-1)\end{vmatrix}=$ $(\lambda-a)(\lambda-a-1)(\lambda-a+2)$

有特征值$\lambda_1=a,\ \lambda_2=a+1,\ \lambda_3=a-2.$

(2)由于二次型的标准形为$y_1^2+y_2^2$，所以A的特征值中有两个正的，一个为0.

注意到特征值$a,\ a+1,\ a-2$，则$a=2.$

本题说明：二次型的标准形不唯一.也就是说，不同的可逆线性变换，会化同一个二次型为不同的标准形.

如$f(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

特征多项式为 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & 0 & -1\\ 0 & \lambda-a & 1\\ -1 & 1 & \lambda-(a-1)\end{vmatrix}=$ $(\lambda-a)(\lambda-a-1)(\lambda-a+2)$

有特征值$\lambda_1=a,\ \lambda_2=a+1,\ \lambda_3=a-2.$

(2)由于二次型的标准形为$y_1^2+y_2^2$，所以A的特征值中有两个正的，一个为0.

注意到特征值$a,\ a+1,\ a-2$，则$a=2.$

本题说明：二次型的标准形不唯一.也就是说，不同的可逆线性变换，会化同一个二次型为不同的标准形.

如$f(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3$

在$\begin{cases}x_1=y_1-y_2+y_3\\ x_2=y_2-y_3\\ x_3=y_3\end{cases}$ 之下，化为$y_1^2+y_2^2$；

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

在$\begin{cases} x_1=y_1 \\ x_2=-y_1+2y_2 \\ x_3=y_1-2y_2+y_3 \end{cases}$之下，化为$4y_2^2+y_3^2$；

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

在$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = -y_1 + 2y_2 \\ x_3 = y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases}$ 之下，化为$4y_2^2 + y_3^2$；

但标准形中，正的系数项、负的系数项的个数是不变的.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

在$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = -y_1 + 2y_2 \\ x_3 = y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases}$之下，化为$4y_2^2 + y_3^2$；

但标准形中，正的系数项、负的系数项的个数是不变的.

即，任意一个实二次型$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$经可逆的线性变换$X = CY$，化为了标准形 $d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^n$，

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

在$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = -y_1 + 2y_2 \\ x_3 = y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases}$之下，化为$4y_2^2+y_3^2$；

但标准形中，正的系数项、负的系数项的个数是不变的.

即，任意一个实二次型$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$经可逆的线性变换$X=CY$，化为了标准形 $d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^n$，则系数$d_1, d_2, \ldots, d_n$中，正数、负数、0的个数是由二次型唯一确定的，与可逆的线性变换无关.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

在$\begin{cases} x_1=y_1 \\ x_2=-y_1+2y_2 \\ x_3=y_1-2y_2+y_3 \end{cases}$ 之下，化为$4y_2^2+y_3^2$；

但标准形中，正的系数项、负的系数项的个数是不变的.

即，任意一个实二次型$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$经可逆的线性变换$X=CY$，化为了标准形 $d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^n$，则系数$d_1, d_2, \ldots, d_n$中，正数、负数、0的个数是由二次型唯一确定的，与可逆的线性变换无关.

至于哪一项的系数为正、为负、或者为0，

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

在$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = -y_1 + 2y_2 \\ x_3 = y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases}$ 之下，化为$4y_2^2 + y_3^2$；

但标准形中，正的系数项、负的系数项的个数是不变的.

即，任意一个实二次型$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$经可逆的线性变换$X = CY$，化为了标准形 $d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^n$，则系数$d_1, d_2, \ldots, d_n$中，正数、负数、0的个数是由二次型唯一确定的，与可逆的线性变换无关.

至于哪一项的系数为正、为负、或者为0，正的系数是正数几，负的系数是系数几，这些是由可逆的线性变换确定的.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

在$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = -y_1 + 2y_2 \\ x_3 = y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases}$之下，化为$4y_2^2 + y_3^2$；

但标准形中，正的系数项、负的系数项的个数是不变的.

即，任意一个实二次型$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$经可逆的线性变换$X = CY$，化为了标准形 $d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^n$，则系数$d_1, d_2, \ldots, d_n$中，正数、负数、0的个数是由二次型唯一确定的，与可逆的线性变换无关.

至于哪一项的系数为正、为负、或者为0，正的系数是正数几，负的系数是系数几，这些是由可逆的线性变换确定的.

在上一个例子中，二次型本身确定了它的标准形的系数一定是两个正的，一个为0，没有负的系数.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

在$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = -y_1 + 2y_2 \\ x_3 = y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases}$之下，化为$4y_2^2+y_3^2$；

但标准形中，正的系数项、负的系数项的个数是不变的.

即，任意一个实二次型$f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$经可逆的线性变换$X=CY$，化为了标准形 $d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^n$，则系数$d_1,\ d_2,\ \dots,\ d_n$中，正数、负数、0的个数是由二次型唯一确定的，与可逆的线性变换无关.

至于哪一项的系数为正、为负、或者为0，正的系数是正数几，负的系数是系数几，这些是由可逆的线性变换确定的.

在上一个例子中，二次型本身确定了它的标准形的系数一定是两个正的，一个为0，没有负的系数.至于系数是正数几，哪一项的系数是正的，这是由可逆的线性变换所确定的.

习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

8.解

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

8.解 二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$，其特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-a & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-a \end{vmatrix}$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

8.解 二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$，其特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-a & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-a \end{vmatrix}=(\lambda-a+2)^2(\lambda-a-4)$$

习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

8.解 二次型的矩阵$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$，其特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - a & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - a + 2)^2(\lambda - a - 4)$$

有特征值$\lambda_1 = a - 2$(二重)，$\lambda_2 = a + 4$.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

8.解 二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$，其特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-a & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-a \end{vmatrix}=(\lambda-a+2)^2(\lambda-a-4)$$

有特征值$\lambda_1=a-2$(二重)，$\lambda_2=a+4$.

又因为正交变换$X=PY$化二次型为$6y_1^2$，所以

$P^{-1}AP=P^TAP=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，即，$A$有特征值6和二重特征值0，

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

8.解 二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$，其特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-a & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-a \end{vmatrix}=(\lambda-a+2)^2(\lambda-a-4)$$

有特征值$\lambda_1=a-2$(二重)，$\lambda_2=a+4$.

又因为正交变换$X=PY$化二次型为$6y_1^2$，所以

$P^{-1}AP=P^TAP=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，即，$A$有特征值6和二重特征值0，所以$a=2$.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

9.

习题5.4($P_{179} - P_{180}$)

9. (1)证明

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

9. (1)证明 因为A, B相似，所以存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

9. (1)证明 因为A，B相似，所以存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.

所以$|\lambda I-B|=$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

9. (1)证明 因为A, B相似，所以存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.

所以$|\lambda I-B|=|\lambda I-P^{-1}AP|=$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

9. (1)证明 因为A, B相似，所以存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.

所以$|\lambda I-B|=|\lambda I-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda I-A)P|=$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

9. (1)证明 因为A, B相似，所以存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.

所以$|\lambda I-B|=|\lambda I-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda I-A)P|=|P^{-1}||\lambda I-A||P|=$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

9. (1)证明 因为A, B相似，所以存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.

所以$|\lambda I-B|=|\lambda I-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda I-A)P|=|P^{-1}||\lambda I-A||P|=|\lambda I-A|$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

9. (1)证明 因为A, B相似，所以存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.

所以$|\lambda I-B|=|\lambda I-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda I-A)P|=|P^{-1}||\lambda I-A||P|=|\lambda I-A|$

所以，它们有相同的特征多项式.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

9. (1)证明 因为A, B相似，所以存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.

所以$|\lambda I-B|=|\lambda I-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda I-A)P|=|P^{-1}||\lambda I-A||P|=|\lambda I-A|$

所以，它们有相同的特征多项式.

(2)解

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

9. (1)证明 因为A, B相似，所以存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.

所以$|\lambda I-B|=|\lambda I-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda I-A)P|=|P^{-1}||\lambda I-A||P|=|\lambda I-A|$

所以，它们有相同的特征多项式.

(2)解 如$A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$,

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

9. (1)证明 因为A, B相似，所以存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.

所以$|\lambda I-B|=|\lambda I-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda I-A)P|=|P^{-1}||\lambda I-A||P|=|\lambda I-A|$

所以，它们有相同的特征多项式.

(2)解 如$A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，它们有相同特征多项式$\lambda^2$，但$A$, B的秩不相同，不可能相似.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

9. (1)证明 因为A, B相似，所以存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.

所以$|\lambda I-B|=|\lambda I-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda I-A)P|=|P^{-1}||\lambda I-A||P|=|\lambda I-A|$

所以，它们有相同的特征多项式.

(2)解 如$A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，它们有相同特征多项式$\lambda^2$，但$A$, B的秩不相同，不可能相似.

(3)证明

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

9. (1)证明 因为A, B相似，所以存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.

所以$|\lambda I-B|=|\lambda I-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda I-A)P|=|P^{-1}||\lambda I-A||P|=|\lambda I-A|$

所以，它们有相同的特征多项式.

(2)解 如$A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，它们有相同特征多项式$\lambda^2$，但$A$, B的秩不相同，不可能相似.

(3)证明 设A, B是实对称矩阵，且有相同的特征多项式，

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

9. (1)证明 因为A, B相似，所以存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.

所以$|\lambda I-B|=|\lambda I-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda I-A)P|=|P^{-1}||\lambda I-A||P|=|\lambda I-A|$

所以，它们有相同的特征多项式.

(2)解 如$A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，它们有相同特征多项式$\lambda^2$，但$A$, B的秩不相同，不可能相似.

(3)证明 设A, B是实对称矩阵，且有相同的特征多项式，则A, B有相同的特征值，设为λ_k, $k=1,2,...,n$.

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

9. (1)证明 因为A，B相似，所以存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.

所以$|\lambda I-B|=|\lambda I-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda I-A)P|=|P^{-1}||\lambda I-A||P|=|\lambda I-A|$

所以，它们有相同的特征多项式.

(2)解 如$A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，它们有相同特征多项式$\lambda^2$，但$A$，$B$的秩不相同，不可能相似.

(3)证明 设A，B是实对称矩阵，且有相同的特征多项式，

则A，B有相同的特征值，设为λ_k，$k=1,2,...,n$.

由于A，B是实对称矩阵，所以存在可逆矩阵P,Q，使得

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

习题5.4($P_{179}-P_{180}$)

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

即A, B相似于同一个对角阵，所以A与B相似.

Thank you!

AUTHOR: Ning Qun

ADDRESS: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China

EMAIL: Ning.qun@163.com