

# 线性代数教学大纲

课程编号: 16DL000407

课程名称: 线性代数

英文名称: Linear Algebra

总课时/学分: 48/3 (其中理论课时: 48, 课内实验课时: 0, 课内实践课时: 0.)

## 一、概要

(一)课程性质:线性代数是以前矩阵理论及其应用为核心内容,并为学生提供解决问题的思想方法和工具的数学类课程,是理工、经管类本科专业学生进一步学习专业知识,掌握专业技能必须开设的一门公共基础课程。

课程内容主要是在引入矩阵、线性变换和向量空间等数学工具的同时,给出一般线性方程组的有解判定和解的表示问题的解答,并解决了实二次型化为标准型等问题。

(二)教材及授课对象:宁群主编,《线性代数》(普通高等学校省级规划教材,应用型本科教育数学基础教材),合肥:中国科学技术大学出版社,2013.8.

授课对象:全校理工、经管类本科专业学生。

(三)课程目标:本课程要求学生在系统地学习和掌握线性代数的基础知识、基本理论和基本方法的基础上,能很好的理解和掌握蕴含在课程内容中的数学思想和模型方法,学会理性的数学思维技术和模式,并能利用线性代数的基本理论框架和知识体系分析和解决实际问题。

(四)课程授课计划:共48课时。(参照12个教学周,每周4课时)

开课周次	内容安排及课时	备注
第1周	§1.1 矩阵的概念(1课时); §1.2 矩阵的关系和运算(2课时); §1.3 矩阵的逆(1课时);	指导学生完成校园网登录

开课周次	内容安排及课时	备注
第2周	§1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法(3课时); 第1章习题课(1课时);	完成第一次书面作业
第3周	第1章习题课(1课时); §2.1 一般线性方程组(1课时); §2.2 线性方程组的高斯消元法(2课时);	完成第二次书面作业 完成第1章上机练习
第4周	§2.3 线性方程组解的情况及其判定准则(2课时); 第2章习题课(1课时); §3.1 线性方程组的另一种表示(1课时);	完成第三次书面作业 完成第2章上机练习
第5周	§3.2 $n$ 维线性方程组(2课时); §3.3 向量组的线性相关与线性无关(2课时);	督促学生上机练习
第6周	§3.3 向量组的线性相关与线性无关(1课时); 第3章前三节习题课(2课时); §3.4 向量组的秩(1课时);	完成第四次书面作业 督促学生上机练习
第7周	§3.4 向量组的秩(1课时); §3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定(2课时); §3.6 线性方程组解的结构(1课时);	督促学生上机练习
第8周	§3.6 线性方程组解的结构(1课时); 第3章后三节习题课(2课时); §4.1 $n$ 阶方阵的行列式(1课时);	完成第五次书面作业 督促学生上机练习
第9周	§4.1 $n$ 阶方阵的行列式(0.5课时); §4.2 $n$ 阶行列式的计算(1.5课时); §4.3 $n$ 阶行列式的展开定理、克莱姆法则(1.5课时); 第4章习题课(0.5课时);	督促学生上机练习
第10周	第4章习题课(1课时); §5.1 矩阵的等价、相似于合同(1课时); §5.2 矩阵的对角化(2课时);	完成第六次书面作业 督促学生上机练习

开课周次	内容安排及课时	备注
第11周	第5章习题课(1课时); §5.3 矩阵的合同对角化(2课时); §5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型(1课时);	完成第七次书面作业 督促学生上机练习
第12周	§5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型(1课时); 第5章习题课(1课时); 应用题讲解(2课时);	完成第八次书面作业 督促学生完成 全部上机练习

### (五)教学建议:

(1) 把“初等变换”作为课程内容的“基本算法”，将“抽象的线性代数理论”转化为形象而具体的“变形操作”过程，实现线性代数内容的“具体化”与“可操作”；

(2) 做教学过程的“有心人”，搜集与理论知识密切相关的“实际案例与问题”，倡导“问题驱动”的教学模式。将线性代数的教学内容与现实案例结合起来，以“问题解决”作为处理教学内容的主要手段，充分揭示蕴含在线性代数课程内容中的数学思想和模型方法，提高学习者对线性代数课程内容和思想方法的应用意识和应用能力；

(3) 充分考虑现代计算工具对线性代数课程教学的影响，结合例题演示Matlab软件的一些入门运算功能，鼓励学生尝试使用Matlab等软件解答习题或练习；

(4) 向量组的线性相关性、向量组的秩、极大线性无关组、行列式的性质、行列式的展开定理、矩阵可对角化的充要条件、实对称矩阵的合同对角化等内容，数学理论严谨，逻辑性强。在教学过程中，尽可能结合具体的例子予以解释、说明，未必给予严格的数学证明。

(5) 鼓励学生课前预习，课后多做习题，坚决反对作业抄袭行为。课前预习可以带着问题学习，课堂学习会更有针对性，提高学习效率。目前，“多做练习”仍被公认为是学习数学的最有效方法和途径。

### (六)考核要求:

本课程是一门考试课程。

依据线性代数课程教学改革方案，本课程考核采用“机考+笔试”的方式进行。

“机考”是针对线性代数理论知识的考核。借助校园网络考试平台，由考试系统在已知题库中随机抽取50道选择题供考生在1小时内解答完成，成绩由考试系统自动评定。

“笔试”是针对线性代数知识应用的考核。由教材中若干道计算题或证明题以及2-3道具有现实背景并能利用线性代数知识和思想方法解决的实际问题组成。要求考生在1小时内完成解答。

课程综合成绩= 平时成绩 (30%) + 期末成绩 (70%);

平时成绩= 考勤成绩 (40%) + 书面作业成绩 (40%) + 网络在线练习成绩 (20%);

期末成绩= 机考成绩 (40%) + 教材中计算或证明 (20%) + 应用题笔试成绩 (40%);

“书面作业成绩”是对学生完成《线性代数练习册》以及老师课堂布置的作业完成情况的考核。学生应在指定时段，独立且正确完成相应章节的习题解答，并按时提交，即可获得相应的书面作业成绩。

“网络在线练习成绩”是对学生利用校园网络平台“公共数学考试与测评系统”中习题完成情况的考核。“公共数学考试与测评系统”是对全校公共数学选课学生都开放的测试平台，每位选课学生的登录系统的初始用户名和密码均为个人学号。学生每次登录系统并作答的情况，系统都将自动记录。系统的自动记录将作为“网络在线练习成绩”的主要依据。

## 二、教学内容

### 第1章 矩阵及其运算

**主要教学目标：**了解矩阵的概念及其表示；理解初等矩阵、主元的概念；能判断出对角矩阵、数量矩阵、单位矩阵、阶梯形矩阵等特殊矩阵；理解和掌握矩阵运算及其性质；会利用矩阵运算关系对马尔科夫链模型等问题进行数学建模；理解“初等变换”、“初等矩阵”与矩阵乘积之间的关系；会将一般矩阵经过初等行变换化为阶梯形矩阵，并能写出初等行变换对应的初等矩阵；理解逆矩阵的概念和性质，理解“行初等变换求逆矩阵”的原理；掌握“行初等变换求逆矩阵”的方法；能把低阶（2阶、3阶）可逆矩阵表成初等矩阵的乘积；会用初等行变换解可逆系数的矩阵方程 $AX = B$ ；了解Matlab软件在矩阵运算中的简单应用。

**教学方法与教学手段：**以“讲授法”为主，适当结合多媒体演示教学。

**教学重点：**矩阵运算(加法、数积、乘法、转置)的定义及其性质；利用矩阵运算关系对马尔科夫链模型等问题进行数学建模；可逆矩阵的概念及其性质；初等变换、初等矩阵的概念，初等矩阵与初等变换之间的关系；可逆矩阵的初等矩阵分解；行初等变换求矩阵的逆矩阵。

**教学难点：**矩阵的乘法运算及其性质；利用矩阵运算关系对马尔科夫链模型等问题进行数学建模；初等矩阵与初等变换之间的关系；可逆矩阵的初等矩阵分解；行初等变换求矩阵的逆矩阵。

**教学内容及进度安排：**总课时：9课时。

§1.1 矩阵的概念 (1课时)

矩阵理论的形成和发展介绍。实例引入矩阵概念, (多媒体) 演示实例中矩阵在实际意义下的运算。几种重要的特殊矩阵(对角形、三角形、阶梯形)。利用Matlab软件演示矩阵运算的例子。

### §1.2 矩阵的关系和运算(用2课时)

矩阵的相等。矩阵的加法运算和加法运算的性质。数与矩阵的乘积和性质。矩阵的乘法运算和乘法运算的性质, 乘法不满足交换律和消去律的例子。矩阵的转置和性质。城乡人口流动模型(马尔科夫链模型)的例子。

### §1.3 矩阵的逆(1课时)

矩阵逆的一个引例。可逆矩阵和矩阵逆的定义。可逆矩阵的性质。一些特殊可逆矩阵的例子。利用Matlab软件演示矩阵求逆的例子。

作业: 完成第一次书面作业, 并按时提交。

登录校园网“公共数学考试与测评系统”, 完成前三节的测试习题。

### §1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法(3课时)

三种初等行变换。初等行变换化矩阵为阶梯形矩阵的例子, 利用Matlab软件演示化矩阵为阶梯形的例子。三种初等矩阵的符号表示, 例子。初等矩阵左乘矩阵 $A$ 与对 $A$ 实施初等行变换的关系进行比较的例子。初等行变换和初等矩阵表述矩阵可逆的充要条件。初等行变换求矩阵逆的方法、步骤。初等行变换求矩阵逆的例子。求解以可逆矩阵为系数的矩阵方程例子。利用Matlab软件演示求解矩阵方程的例子。

习题课2课时。

作业: 完成第二次书面作业, 并按时提交。

登录校园网“公共数学考试与测评系统”, 完成第一章全部试题。

## 第2章 线性方程组

**主要教学目标:** 理解线性方程组、系数矩阵、增广矩阵的概念; 能用线性方程组对某些实际问题建模; 能用矩阵表示线性方程组; 理解高斯消元过程与增广矩阵的初等行变换之间的对应关系; 会用初等行变换下增广矩阵的标准形判断线性方程组解的情况; 会利用增广矩阵的初等行变换下的标准形, 恰当选择自由未知量, 写出线性方程组的通解; 能利用增广矩阵初等行变换下的标准形讨论系数中含参数的线性方程组解的情形(有解? 无解? 有解时, 解是否唯一, 有无穷多解时, 能写出通解)。

**教学方法与教学手段:** 以“讲授法”为主, 适当结合多媒体演示教学。

**教学重点:** 利用线性方程组对实际问题进行建模; 增广矩阵的初等行变换与高斯消元法之间的对应关系; 在增广矩阵的标准形(阶梯形)下讨论线性方程组(齐次、非齐次)解的情形; 线性方程组(齐次、非齐次)有解判定定理(定理2.1、推论2.1、推论2.2); 含参数的线性方程组(齐次、非齐次)解的情形讨论; 一般线性方程组有解判定以及求解的步骤。

**教学难点：**增广矩阵的初等行变换与高斯消元法之间的对应关系；含参数的线性方程组（齐次、非齐次）解的情形讨论。

**教学内容及进度安排：**总课时：6课时。

### §2.1 一般线性方程组（1课时）

电路网络问题。诺贝尔经济学奖的数学模型。 $n$ 元线性方程、 $n$ 元线性方程组、齐次线性方程组、线性方程组的解向量、解集、齐次线性方程组的非零解。

### §2.2 线性方程组的高斯消元法（2课时）

线性方程组的初等变换。系数矩阵、增广矩阵。增广矩阵表示线性方程组。加减消元法解线性方程组的例子。加减消元法解线性方程组与增广矩阵的初等行变换解线性方程组的过程比较的例子。线性方程组无解的例子。线性方程组有无穷多解的例子。主变量、自由未知量、线性方程组的一般解。线性方程组解的情形。

### §2.3 线性方程组解的情况及其判定准则（2课时）

增广矩阵的标准形(阶梯形)与线性方程组解的情形的关系讨论。线性方程组有解判定定理（定理2.1）。求解系数含参数的线性方程组的例子。齐次线性方程组解的情形（判定定理，推论2.1，推论2.2）。求解系数含参数的齐次线性方程组解的例子。一般线性方程组有解判定以及求解步骤。

习题课1课时。

作业：完成第三次书面作业，并按时提交。

登录校园网“公共数学考试与测评系统”，完成第二章全部试题。

## 第3章 向量空间

**主要教学目标：**理解数组向量、向量组的线性表出、线性相关、线性无关、向量组的极大线性无关组、向量组的秩等概念；掌握数组向量的运算及其性质；理解线性方程组的向量表示，并能用向量语言表述线性方程组有解的等价条件；熟悉向量组线性相关性的等价条件和三种等价表述（组合表述、线性表出表述、方程组表述）；理解并会用矩阵的行初等变换下的标准形来判断向量组的线性相关性（初等行变换不改变矩阵列向量的线性相关性）；熟悉特殊向量组的线性相关性以及关于向量组线性相关性的重要命题；通过例题，了解向量组线性相关和线性无关在证明方法和叙述模式上差异；熟悉关于向量组的极大线性无关组和秩的重要命题，向量组（线性表出）所含的向量个数与线性相关性的关系；掌握向量组秩的求法，能用向量组的秩判定线性方程组解的情形，能用向量组的秩求解含参变量系数的线性方程组；熟悉齐次线性方程组解的性质和解的判定以及解的结构定理，掌握齐次线性方程组基础解系的求解步骤和求解方法，能写出齐次线性方程组解空间；理解非齐次线性方程组与其导出齐次线性方程组的解向量之间的关系以及一般线性方程组解集的结构定理，能用导出齐次线性方程组的基础解系和方程组的特解，写出一一般线性方程组的解集。

**教学方法与教学手段：**以“讲授法”为主，适当结合多媒体演示教学。

**教学重点：**数组向量的运算及其性质；向量组线性相关性的概念及其判定方法；向量组线性相关性的三种不同的等价表述（组合表述、线性表出表述、方程组表述）；向量组线性相关性的重要命题（例3.4、例3.5、例3.7）；向量组的线性相关性表述线性方程组有解的充要条件的命题（例3.8、例3.9，定理3.1）；向量组的极大线性无关组的概念及其性质定理（定理3.2、定理3.3、定理3.4、定理3.5、定理3.6、定理3.7）；向量组的极大线性无关组以及秩的求法，含参数的矩阵秩的讨论；线性方程组（齐次、非齐次）解的结构性质。

**教学难点：**向量组线性相关性的概念及其判定方法；向量组的线性相关性表述线性方程组有解的充要条件的重要命题（例3.8、例3.9，定理3.1）；向量组的极大线性无关组的概念及其性质定理（定理3.2、定理3.3、定理3.4、定理3.5、定理3.6、定理3.7）；初等行变换不改变矩阵列向量的线性相关性；含参数的矩阵秩的讨论。

**教学内容及进度安排：**总课时：16课时。

### §3.1 线性方程组的另一种表示（0.5课时）

从系数认识线性方程组，将线性方程组改写成数组向量的运算形式。

### §3.2 $n$ 维数组向量空间（2.5课时）

$n$ 维数组向量的集合 $F^n$ 。向量的相等。向量的加法运算及其性质。数与向量的乘积运算及其性质。向量组的线性组合与线性表出，线性方程组的向量组合表示。用向量组的线性表出表述线性方程组有解的充要条件。向量能否被给定向量组线性表出的判断方法（例3.1）。

### §3.3 向量组的线性相关与线性无关（3课时）

向量组的线性相关与线性无关。向量组线性相关性的判定及其例子。若干特殊向量组的线性相关性。向量组线性相关性的三种等价表述。部分与整体的相关性关系。证明向量组线性相关性的两个例子（例3.4、例3.5）。线性相关的向量组中求一个向量可以被另外的向量线性表出的例子（例3.6）。延伸组与缩短组线性相关性之间的关系（例3.7）。向量组的线性相关性表述线性方程组有解的充要条件（例3.8、例3.9，定理3.1）。

习题课（2课时）。

作业：完成第四次书面作业，并按时提交。

登录校园网“公共数学考试与测评系统”，完成第三章前三节试题。

### §3.4 向量组的秩（2课时）

极大线性无关组。向量组中的每一个向量都可以被向量组的极大线性无关组线性表出（定理3.2）。向量组的线性表出与等价及其性质。同一个向量组的两个极大线性无关组等价。向量个数多的向量组被向量个数少的向量组线性表出，多的一定线性相关（定

理3.3, 推论3.2、3.3, 只解释不证明)。同一个向量组的极大线性无关组所含的向量个数相等(定理3.4)。向量组秩的定义。等价向量组有相同的秩(定理3.5)。秩为 $r$ 的向量组中任意 $r$ 个向量构成的线性无关的部分组都是其极大线性无关组(定理3.6, 只解释不证明)。向量组的秩与向量的线性表出(定理3.7, 只解释不证明)。

### §3.5 向量组秩的求法、方程组有解的判定(2课时)

初等行变换下, 矩阵列向量组的任意部分组的线性相关性不变(定理3.8, 只解释不证明)。初等行变换下矩阵的阶梯形中, 主元的个数即为其列向量组的秩, 主元所对应的列即为原来矩阵列向量组的极大线性无关组所对应的列(定理3.9, 只解释不证明)。求解向量组的极大线性无关组的例子。讨论含参数矩阵秩的例子。线性方程组有解当且仅当系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩(定理3.10)。利用秩讨论含参数线性方程组的解(例3.12)。

### §3.6 线性方程组解的结构(2课时)

线性方程组解的一般形式。齐次线性方程组解向量的性质。基础解系。齐次线性方程组解集的结构定理(定理3.11)。求解齐次线性方程组的方法、步骤、例题。非齐次线性方程组解向量的性质。非齐次线性方程组解集的结构定理(定理3.12)。求解非齐次线性方程组方法、步骤、例题。

习题课2课时。

作业: 完成第五次书面作业, 并按时提交。

登录校园网“公共数学考试与测评系统”, 完成第三章后三节的试题。

## 第4章 行列式

**主要教学目标:** 熟悉行列式的定义以及反对称性、线性性质与初等矩阵乘积之间的关系; 熟悉特殊矩阵的行列式, 会用行列式的性质计算行列式; 掌握行列式的展开定理; 掌握伴随矩阵及其应用(求可逆矩阵的逆矩阵); 了解克莱姆法则及其应用。

**教学方法与教学手段:** 以“讲授法”为主, 适当结合多媒体演示教学。

**教学重点:** 行列式的运算性质; 行列式的计算。矩阵可逆当且仅当其行列式不等于零; 转置不改变行列式的值; 余子式、代数余子式、伴随矩阵; 用伴随矩阵求可逆矩阵的逆矩阵; 行列式的按行(列)展开定理。

**教学难点:** 行列式的定义; 行列式的计算; 行列式运算性质的初等矩阵表述; 矩阵乘积的行列式等于行列式的乘积; 行列式的展开定理; 克莱姆法则。

**教学内容及进度安排:** 总课时: 6课时。

### §4.1 $n$ 阶方阵的行列式(1.5课时)

行列式的定义。行列式的运算性质(结合例子进行说明)。行列式的反对称性、线性性质的初等矩阵乘积表述。特殊矩阵的行列式。

### §4.2 $n$ 阶行列式的计算(1.5课时)



三角形矩阵的行列式。矩阵乘积的行列式等于行列式之积。互为逆矩阵的两个矩阵的行列式之积等于1。转置不改变矩阵的行列式。行列式计算的例子（例4.2）。

#### §4.3 $n$ 阶行列式的展开定理、克莱姆法则（1.5课时）

分块矩阵及其运算的认识。两个引理（引理4.1、引理4.2，只解释不证明）。余子式、代数余子式。某一行只有一个非零元素的行列式的展开（引理4.3，只解释不证明）。行列式按行（按列）展开定理（定理4.3、定理4.4、定理4.5，只解释不证明）。伴随矩阵及其运算性质，利用伴随矩阵求逆矩阵及其例子。克莱姆法则。

习题课1.5课时。

作业：完成第六次书面作业，并按时提交。

登录校园网“公共数学考试与测评系统”，完成第四章全部试题。

### 第5章 矩阵的等价、相似与合同

**主要教学目标：**熟悉矩阵的等价、相似、合同等概念；熟悉矩阵的等价标准形及其表示；掌握与矩阵等价相关的重要命题，理解两个矩阵等价的充要条件，会判断两个矩阵是否等价；理解矩阵可以对角化的充要条件；会求矩阵的特征值和特征向量；了解特征向量的性质；能求出可逆矩阵 $P$ 以及对角矩阵 $D$ ，使得 $P^{-1}AP = D$ ；了解实数域上向量的内积、长度等概念；会用施密特正交化方法对线性无关的向量组进行施密特正交化；会求正交矩阵 $P$ ，使得实对称矩阵 $A$ ，满足 $P^{-1}AP = D$ ，能将这些结论用于实二次型；熟悉实二次型的矩阵表示，了解二次型的标准形以及正定性的判定。

**教学方法与教学手段：**以“讲授法”为主，适当结合多媒体演示教学。

**教学重点：**矩阵的等价、相似、合同概念；矩阵的等价标准形，矩阵等价的充要条件；矩阵的等价分解；矩阵的特征值与特征向量及其计算；矩阵相似于对角阵的充要条件；求可逆矩阵 $P$ ，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵；施密特正交化方法；对称矩阵合同与对角阵；正交逆矩阵 $P$ 的存在及其求法，使得实对称矩阵 $A$ 满足 $P^{-1}AP$ 为对角阵；正交变换化实二次型为标准形的理论与方法、步骤。

**教学难点：**矩阵的等价分解及其应用；矩阵相似于对角阵的充要条件；求可逆矩阵 $P$ ，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵；正交逆矩阵 $P$ 的存在及其求法，使得实对称矩阵 $A$ 满足 $P^{-1}AP$ 为对角阵；正交变换化实二次型为标准形的理论与计算。

**教学内容及进度安排：**总课时：9课时。

#### §5.1 矩阵的等价、相似与合同（1课时）

矩阵的等价以及等价标准形（定理5.1）。矩阵的等价分解（定理5.2）。矩阵的相似对角化。矩阵的合同。

#### §5.2 矩阵的对角化（2课时）

矩阵的特征值与特征向量。矩阵可对角化的充要条件(定理5.3)。属于不同特征值的特征向量线性无关(定理5.4)。矩阵的特征多项式。求解矩阵的特征值与特征向量的方法、步骤。求解可逆矩阵 $P$ ,使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵的例子。

习题课1课时。

作业:完成第七次书面作业,并按时提交。

登录校园网“公共数学考试与测评系统”,完成第五章前二节全部试题。

### §5.3 矩阵的合同对角化(2课时)

向量的内积运算和性质。实数组向量的单位化。施密特正交化公式、例子。正交矩阵的例子。实对称矩阵属于不同特征值的特征向量正交。求解正交矩阵 $P$ ,使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵的例子。

### §5.4 矩阵合同对角化的应用—实二次型(2课时)

二次型的对称矩阵表示。非退化的线性替换化二次型为标准形及其矩阵运算表示。求可逆的线性替换,化实二次型为标准形的方法步骤以及例子(例5.5、例5.6)。

习题课1课时。

作业:完成第八次书面作业,并按时提交。

登录校园网“公共数学考试与测评系统”,完成第五章全部试题。

## 第6章 应用题

**主要教学目标:**通过案例,揭示线性代数课程知识体系中蕴含的数学模型方法,提高学生利用线性代数的知识体系和思想方法解决实际问题的能力。

**教学方法与教学手段:**以“讲授法”为主,结合案例分析教学和多媒体演示教学。

**教学重点:**根据实际问题,有效的选择线性代数的知识和思想,进行合理的建模。

**教学难点:**有效进行数学建模,将实际问题抽象为数学问题。

**教学内容及进度安排:**总课时:2课时。

在已有的应用案例库中,选择4个具有代表性的案例,进行详细的分析讲解(2课时)。

制订人: 宁 群

教研室主任: 张光辉

院长: 宁 群

二〇一七年十月